МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

МЕХАНІКА РУЙНУВАННЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

ДНІПРО - 2018
НТУ
«Дніпровська політехніка»

Лекція 1 Вступ

Що таке міцність і руйнування?

Міцність – це здатність конструкції не руйнуватися. Тобто не розділятися на окремі частини.

Руйнування можна вважати явище розділення конструкції на частини, тобто це є наслідок порушення міцності конструкції.

Так як можна розглядати міцність при статичних, динамічних, теплових навантаженнях, відповідно руйнування відбувається при дії статичних, теплових, динамічних збуджень при різних супроводжуючих експлуатацію конструкції умовах (температура, корозія, агресивні середовища).

У більш широкому розумінні цього терміну руйнування можна визначити яку завгодно зміну розмірів, форми або властивості матеріалу конструкції внаслідок якої конструкція не може задовільно виконувати свої функції. Основним завданням конструктора є створення конструкції, яка б виконувала призначені їй функції на протязі встановленого терміну і була б конкурентноспроможною.

Очевидно, що для того щоб добитися успіху у проектуванні, необхідно володіти методами оцінки можливості руйнування і як цьому можна запобігати.

Технічні досягнення людства за останні 100, 50 і навіть 20 років привели до необхідності зменшення об’єму конструкцій, підвищення їх терміну експлуатації і надійності роботи, зменшення вартості – все це викликає необхідність удосконалення методів розрахунку і проектування.

Звичними є швидкості обертання 30000 об/хв і температури експлуатації вище 1000°С. Ядерне випромінювання, екстремальні температури, космічні швидкості приводять до необхідності кращого розуміння особливостей напружено-деформованого стану при складних навантаженнях і ускладнених умовах експлуатації. Паралельно з розробкою нових матеріалів, нових конструктивних форм, удосконалення технологічних процесів виготовлення конструкцій необхідно вивчати шляхи більш ефективного використання можливостей існуючих матеріалів і конструкцій.

Метою кожного проекту є побудова ідеальної конструкції без слабких місць (тобто усі деталі повинні працювати в однакових умовах), ефективної і економічної, конструкції яка не повинна руйнуватися раніше призначеного їй ресурсу, бути технологічною, доступною для ремонту і обслуговування. Важливим фактором є періодична оцінка дієздатності конструкції, діагностика її стану на етапах її роботи. Одержані при цьому дані є важливими і для наступних проектів аналогічних конструкцій.

У багатьох випадках поняття руйнування розуміють дуже широко – як неможливість подальшої експлуатації конструкції. У даному курсі лекцій ми дещо звузимо це поняття і будемо розглядати руйнування, як процес зміни стану матеріалу конструкції, який приводить до неможливості подальшої експлуатації конструкції. Таким чином руйнування розглядатиметься не як явище, а як процес, що приводить або може привести до розділення конструкції або її елементів на елементи не передбачені проектом, і втрати можливості ефективної експлуатації конструкції.

Таке поняття руйнування приводить до необхідності вивчення процесів появи і розвитку тріщин в матеріалі у залежності від факторів, супроводжуючих роботу конструкції.

Необхідність вивчення руйнування як наслідку появи і розвитку тріщини у матеріалі конструкцій стала зрозумілою після експериментальних досліджень стану матеріалу конструкцій як у процесі експлуатації, так і після руйнування.

Суттєвим поштовхом до цих досліджень були численні аварії, які сталися при обставинах не відповідаючих критеріям міцності з точки зору прийнятої методики розрахунків на міцність. Катастрофічні руйнування відбувалися і відбуваються на протязі усього існування поняття "конструкція", тобто витвір людини. Зазначимо, що у природи значно більший досвід і значно менше помилок. Свій досвід з проектування природа віддавала за відповідну плату. Не зупиняючись на руйнуванні конструкцій у минулі часи, коли людство не мало розвинутих методів проектування і знало менше 10% знань природи, згадаємо ті, що відбулися у останні 50-80 років. Нагадаємо, що наука про міцність стала наукою з середини 19 століття і пов’язана з іменем Б.Сен-Венана, О.Коші; основні ж результати і методи було одержано у 20 столітті.

Найбільша кількість руйнувань пов’язана з мостами. Так 16 березня 1938р. у холодну погоду практично без силового навантаження (окрім власної ваги) зруйнувався зварний автодорожній міст через канал Альберта у Бельгії, у 1940році відбулася катастрофа Такомського мосту в США, у 1962 році зруйнувався Королівський міст у Мельбурні (Австралія).

Страшні катастрофі з багатьма людськими жертвами відбувалися при руйнуванні транспортних засобів – літаків і суден. Політ першого у світі реактивного літака "Комета" (Англія), який вибухнув у повітрі призвів до загибелі екіпажу, причому після авіакатастрофи зібрали біля 250 тис. уламків. У кінці 1942р. відбулося декілька аварій американських суден типу "Ліберті". У зв’язку з війною досліджень цих аварій проведено не було, і уже 16 січня 1943 року після успішних морських випробувань при повернені на базу розломився пополам танкер "Скенектеди". Тріщина з'явилася у гострому куті люка на палубі, миттєво пройшла через палубу по двох бортах до кіля. Це сталося у погану погоду, при -3°С температури повітря, і 4.5°С води. У 1943р. аналогічна катастрофа сталася з такими же судами "Манхеттен", побудованими раніше на 7 місяців.

До кінця 1958 року у США було зафіксовано 319 аварій і руйнування суден. У цей же період декілька аналогічних аварій відбувалися і в Європі, і комісії по розслідуванні аварій зробили заключення, що причиною їх стала погана якість сталі і поява тріщин. 25 березня 1980р. сталася аварія з плавучою платформою у Північному морі, яка привела до загибелі 123 чоловік, причому погодні умови були звичайними для Північного моря (не екстремальними). При аналізі причин аварії встановлено, що на ранній стадії з'явилася втомна тріщина у зварному шві вузла закріплення одного з трубчастих елементів. Це привело до відхилення платформи від вертикалі, і вона перекинулася за 20 хвилин. Ряд аварій сталися і в колишньому СРСР; особливо характерними були аварії циліндричних оболонок і трубопроводів, працюючих в екстремальних умовах.

Аналіз аварій показав, що існуючих методів розрахунку на міцність недостатньо для гарантування міцності конструкцій. З одного боку очевидною стала необхідність врахування можливих екстремальних умов експлуатації, зокрема наявність в конструкції тріщин і можливість їх розвитку у процесі експлуатації, особливо в екстремальних умовах, сприяючих розвитку тріщин, (температура, корозія, хімічні реакції). Найбільш суттєвим фактором виявилась концентрація (збільшення) напружень у місцях різкої зміни форми конструкції або її вузлів. Це явище вперше відкрив німецький механік Кірш (1898 р), який одержав розв'язок задачі про розподілення напружень біля круглого отвору у пластині при розтягу. Поняття "концентрація" з'явилося після появи робіт російського вченого Г.В.Колосова (1909р) і англійського К.Інгліса (1913р). Частіше всього руйнування відбувалися у зоні концентрації напружень від появи і розвитку тріщини. Здавалося, що побороти́ся з цим злом можна збільшенням коефіцієнта запасу, але при подальшому аналізі руйнувань виявилося, що, по-перше, у кожній конструкції є від народження багато тріщин і тріщиноподібних дефектів, а по-друге,– руйнування відбувалися і в елементах конструкцій де не було виявлено тріщин і інших макродефектів. Якщо в першому випадку руйнування залежало від концентрації напружень і макродефектів, то у другому визначальними були максимальні напруження у об'ємі конструкції. Якщо у першому випадку руйнування відбувалося здебільшого несподівано, то у другому у повній відповідності з властивостями макрооднорідного матеріалу, які виявлені на лабораторних зразках.

Таким чином явище руйнування потребувало вивчення як на макрорівні (руйнування від наявності макродефектів), так і на мікрорівні (пояснення зародження тріщини у практично однорідному бездефектному матеріалі). Вивченням руйнування на макрорівні, тобто вивчення поведінки конструкції при експлуатації, займається механіка руйнування. Вивчення розвитку тріщин, пов'язаних з неоднорідністю матеріалів (наявністю зернистої будови) є предметом вивчення матеріалознавства; механізми, що приводять до появи мікротріщин, розмір яких набагато (на порядок-два) менше розмірів зерен, і які при несприятливих умовах можуть перерости у макродефект, вивчає фізика. Таке народження субмікротріщин (розмірами 10-1000 нанометрів) може привести до утворення катастрофічно зростаючих тріщин без стадії їх поступового зростання. Народження субмікротріщин відбувається у результаті елементарних пластичних зсувів у орієнтованих по різному кристалах (зернах) металу. Виявляється, що мікротріщина є ідеально гострою, радіус її дорівнює міжатомній відстані, причому він зберігається і тоді, коли розмір зародкової тріщини стає критичним з точки зору механіки руйнування. Цей підхід може бути покладено в основу явища руйнування матеріалів і дає можливість використати теорію напружено-деформованого стану і об'єднати зусилля здобутки фізики і механіки руйнування в єдину теорію руйнування.

Умови появи тріщин в об’ємі вивчають фізика твердого тіла і мікромеханіка руйнування на мікрорівні 10^{-7} см, матеріалознавство на рівні 10^{-5}-10^{-2} см і механіка руйнування на рівні 10^{-1} см (рис. 1).

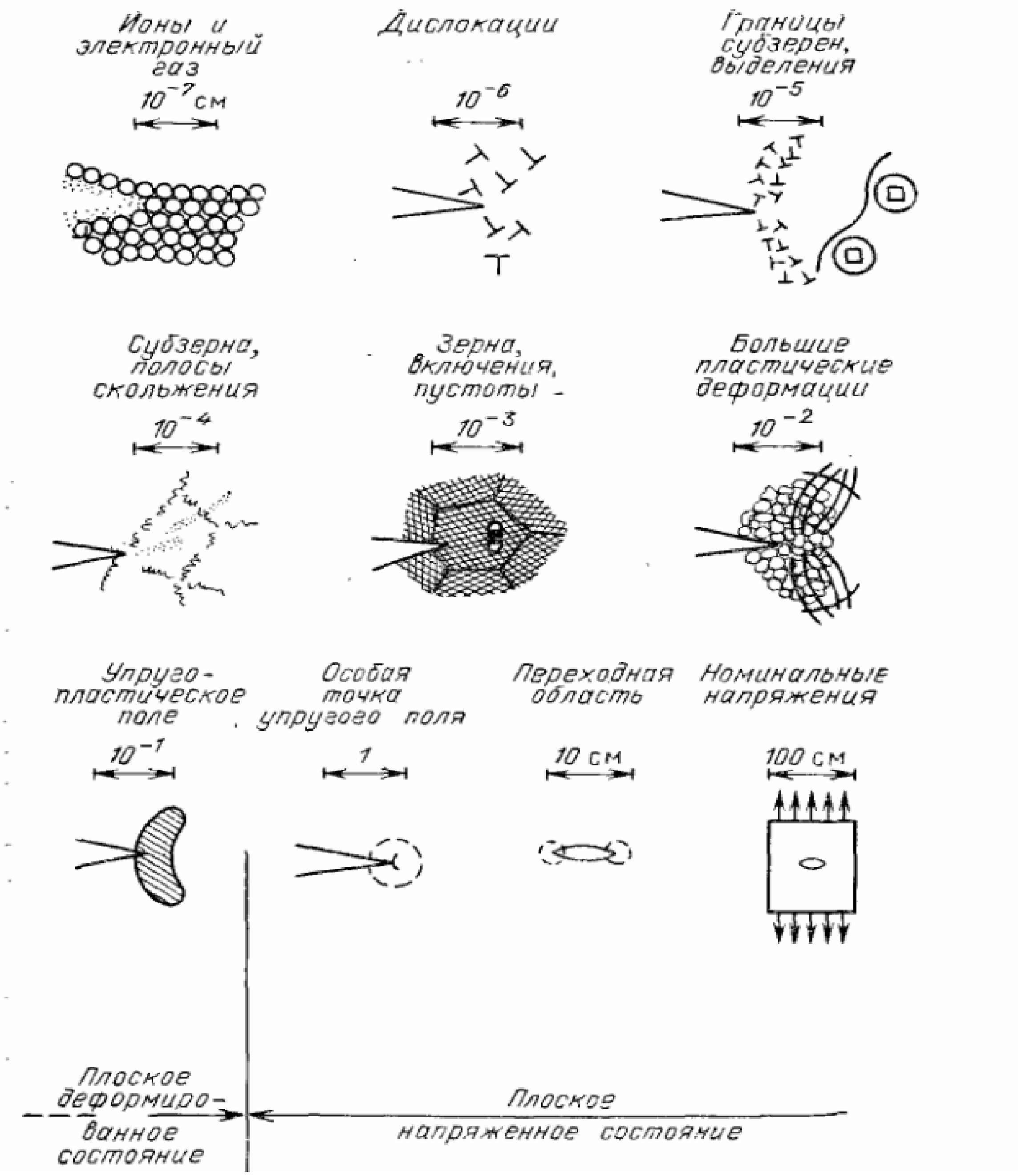


Рис. 1.1[1]

Новий напрям, в основі якого лежить вивчення процесу руйнування як зародження і розвиток тріщин, почався з публікації роботи англійського вченого Грифітса, який досліджував відхилення реальної міцності скляних волокон від теоретичної.Значне зменшення практичних значень границі міцності і модуля пружності від тих, що пропонувала фізика Грифітс вбачав у наявності поверхневих тріщин.

Ця точка зору знайшла підтвердження у роботах видатного фізика А.Ф.Іоффе. Таким чином, оскільки руйнування відбувається внаслідок появи і розвитку тріщин та інших дефектів для оцінки міцності необхідно враховувати наявність і вплив цих дефектів на міцність.

До 40-хроків 20 століття розвиток цих ідей був незначним. Існуюча думка про те, що процес руйнування є миттєвим, обмежувало побудову критеріїв, де мав би місце зв'язок з розмірами тріщин. Пізніше було виявлено, що процес розвитку тріщин займає значний час, який передує повному руйнуванню, причому це відноситься не тільки до руйнування від втоми, а і до пластичного і навіть до крихкого руйнування . У той же час експериментальні дослідження свідчать, що у правильно спроектованих та виготовлених конструкціях у значному діапазоні зміни зовнішніх навантажень розвиток тріщин відбувається поступово за деякий час до моменту руйнування. Тому характеристики міцності в певних межах можуть не залежати від початкових довжин тріщин я визначатися деякими структурними параметрами матеріалу, такими, наприклад, як величина зерна.

Таким чином, у даному випадку прийнятним є підхід, який пов'язаний з можливістю використовування відомих теорій міцності після введення додаткового внутрішнього структурного параметра, який не залежить від параметрів реологічної моделі.. Аналогічні ідеї, пов'язані з введенням додаткових структурних параметрів у фізичні рівняння, розвинуті у роботах Л. И. Сєдова.

Найважливішим моментом в теорії тріщин є формулювання умови локального руйнування в довільній точці контура тріщини. Це так само важливо як при вирішенні питання про розвиток тріщини, так і при виборі критерію настання пластичного стану в елементі об'єму.

Найбільш просто формулюється умова локального руйнування в теорії так званих квазікрихких тріщин, коли найбільший розмір області незворотніх деформацій в точці контура тріщини, що розглядається, малий в порівнянні з довжиною тріщини і відстанню цієї точки до найближчої границі тіла. Найпростіший варіант запропоновано англійським вченим Дж. Р. Ірвіном. Він полягає в тому, що коефіцієнт у виразі для напружень у вершині тріщини у момент локального руйнування вважається рівним деякій сталій матеріалу; при цьому напруження обчислюються у припущенні, що тіло ідеально пружне. Оскільки вказаний коефіцієнт є деякою функцією зовнішніх навантажень, довжини тріщини і геометрії тіла, яка знаходиться з рішення ідеально-пружної задачі в цілому, умова локального руйнування на контурі тріщини у принципі дозволяє визначати її розвиток і, зокрема, знайти ту комбінацію зовнішніх навантажень, яка розділяє області стійкості і нестійкості (докладніше про це буде сказано в наступних розділах). Пізніше було запропоновано різні моделі механізму руйнування у вершині квазікрихкої тріщини. Проте всі відомі моделі, що відрізняються детальною схемою локального розриву у вершині крихкої тріщини, еквівалентні в тому значенні, що завжди приводять до умови Грифітса—Ірвіна [1]. Зараз вважається встановленим, що кожна конструкція має велику кількість тріщин різних розмірів від мікроскопічних до макротріщин. Розвиток тріщин займає значний час, причому швидкість розвитку тріщини дуже повільна на початку розвитку і наближається до швидкості звуку на завершальному етапі. Міцність конструкції зменшується з розвитком тріщини.

Традиційні розрахунки міцності елементів конструкцій і споруд ведуться у припущенні, що конструкції не мають тріщин і подібних дефектів. При цьому властивості матеріалу у конструкції співпадають з властивостями матеріалів, які одержують у лабораторних умовах на стандартних зразках. У той же час при виготовленні конструкцій або при їх експлуатації можуть виникати тріщини, особливо у зонах місцевого підвищення напружень і при змінних навантаженнях, при наявності агресивного середовища, температури і інших факторів, які сприяють крихкому руйнуванню. В усіх цих випадках виникає необхідність розрахунку на міцність з урахуванням наявності тріщин з метою відповіді на питання, на які традиційний розрахунок не може відповісти. Такими розрахунками і займається механіка руйнування, мета якої – відповісти на такі питання:

1. Як залежить міцність від розмірів тріщини?
2. Який розмір тріщини для даної конструкції при заданому навантаженні є критичним?
3. Як довго буде розвивається тріщина від початкового розміру до критичного?
4. Як часто треба перевіряти наявність тріщин у конструкції?

Ці питання виникають при виявленні тріщин, але їх можна поставити і авансом, якщо мати експериментальні дані про механічні характеристики тріщиностійкості матеріалу. Відомо, що руйнування є складним багатоступеневим процесом, який починається задовго до появи макротріщин. Оскільки єдина теорія цього явища ще не може вважатися достатньо розробленою, закономірності цього процесу вивчають на різних масштабних рівнях (рис.2.1).

Руйнування може бути частковим або повним. При частковому руйнуванні в тілі виникають пошкодження матеріалу у вигляді окремих тріщин або у вигляді розподілених у об'ємі дефектів матеріалу, що приводять до зміни (в несприятливу для міцності сторону) механічних властивостей матеріалу. При повному руйнуванні відбувається розділення тіла на окремі частини.

Розрізняють такі основні види руйнування:

1. Пластичне руйнування. Відбувається при значній пластичній деформації, яка виникає по всьому (або майже по всьому) об'єму тіла. Різновид пластичного руйнування – розрив після 100%-го звуження шийки при разтягу зразка з ідеально-пластичного матеріалу.

2. Ідеальне крихке (пружне) руйнування відбувається без пластичної деформації, причому з двох одержаних частин зразка можна наново скласти тіло початкових розмірів. Квазікрихке руйнування припускає наявність пластичної зони перед краєм тріщини і зміцнення матеріалу) на поверхні тріщини (інший, і значно більший по величині, об'єм тіла знаходиться при цьому в пружному стані). В техніці квазікрихким називають руйнування, при якому руйнуюча напруга вище за межу текучості, але нижче межі міцності. На рис. 1.2 показана температурні області крихких, квазікрихких до в'язких станів.

3. Втомне руйнування. Відбувається при циклічому (повторному) навантаженні в результаті накопичення необоротних пошкоджень. Злам макроскопічно крихкий, однак, у поверхні зламу матеріал істотно наклепує. Розрізняють втомленість і малоциклову втомленість.

Втомленість характеризується номінальними напругами, меншими за границю текучості, повторне навантаження макроскопічно відбувається в пружній області, число циклів до руйнування велике.

Малоциклова втомленість (інакше повторно-статичне навантаження) характеризується номінальними напругами, більшими за границю текучості, при кожному циклі навантаження виникає макроскопічна пластична деформація, число циклів до руйнування порівняно невелике.

4. Руйнування при повзучості. Характерне для в’язкопружних матеріалів, зокрема полімерів і металів при високих температурах.

5. Корозійне руйнування.Має місце при дії хімічно агресивних середовищ.

Як вже наголошувалося, тріщини починають розвиватися задовго до повного руйнування. Так, наприклад, при однократному статичному розтягуванні гладкого зразка перша тріщина відповідає точці *А* на діаграмі розтягу (рис. 1.2), причому чим чутливіше метод дефектоскопії, тим ближче точка *А* розташовується до початку діаграми.

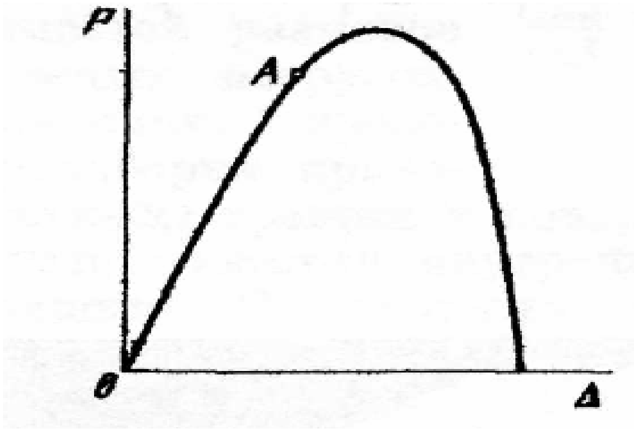


Рис. 1.2

Звідси витікає, що тріщина виникає і навіть розповсюджується до вичерпання конструкцією своєї несучої здатності. У реальних умовах розвиток тріщини залежить від форми і розмірів тіла, способу прикладення зовнішнього навантаження, температури, агресивності середовища і т.і.
Основним завданням механіки руйнування є визначення граничних навантажень для тіл з тріщинами, тобто визначення залежності розмірів тріщин від прикладеного навантаження. Це пов'язано зі зростанням перевантажень різного роду і появою міцних (300-400$\sigma_{ut} = 300-400 H/мм^2$) і надміцних ($\sigma_{ut} = 2000-3000\ H/мм^2$) матеріалів, що приводить до необхідності врахування появи тріщин і введення їх у розрахунки при визначенні запасів міцності деталей і конструкцій. Тому знання законів розповсюдження тріщини і свідоме їх використання дозволяє зробити висновок про несучу здатність деталі або конструкції. Важливим напрямом у механіці руйнування є також вивчення геометрії і динаміки тріщин, тобто визначення особливостей розвитку тріщин, законів руху вершин тріщини, визначення траекторій і поверхонь зламу. При цьому фізичні і механічні теорії міцності, до яких відноситься, зокрема теорія дислокацій і теорія макроскопічних тріщин, суттєво впливають на вибір напрямків по створенню високоміцних сплавів у металургії і матеріалознавстві.

1.1 Види і класифікації руйнувань

Руйнування є надзвичайно складним, багатостадійним процесом, керованим великою кількістю чинників. Залежно від умов, що змінюються, можна отримати різні характеристики процесу руйнування. Про складність і неоднозначність явища свідчить той факт, що загальноприйнятого визначення руйнування і загальноприйнятої класифікації видів руйнування ще не існує.

В загальному випадку механічне руйнування може бути визначено як будь-яка зміна розміру, форми або властивостей матеріалу конструкції, машини або окремої деталі, в результаті якого вона втрачає здатність задовільно виконувати свої функції. Грунтуючись на цьому, *вид руйнування* можна визначити як фізичний процес або декілька взаємозв'язаних між собою процесів, що приводять до руйнування.

Розглянемо найвідоміші спроби класифікації видів і типів руйнування.

Проф. Старки (W. L. Starkey) з Університету шт. Огайо запропонував систему класифікації усіх можливих видів руйнування. Ця система заснована на обліку трьох чинників: (1) характеру руйнування, (2) причин руйнування і (3) місця руйнування. Детально ці чинники визначаються нижче. Кожний окремий вид руйнування характеризується тим, як виявляється руйнування, що його викликає і де воно відбувається. Використовуючи різні комбінації цих чинників, можна вказати буквально сотні видів руйнування. Щоб докладніше пояснити суть цієї системи класифікації, розкриємо зміст кожного з цих трьох чинників.

По *характеру руйнування* можна виділити чотири класи (причому деякі з них можуть складатися з підкласів):

1. Пружна деформація.
2. Пластична деформація.
3. Розрив, або розділення на частини.
4. Зміна матеріалу: (A) металургійна; (B) хімічна; (C) ядерна.

Із *причин руйнування* можна визначити чотири класи:

1. Навантаження: (A) сталі; (B) несталі; (C) циклічні; (D) випадкові.
2. Час процесу: (A) дуже малий; (B) малий; (C) тривалий.
3. Температури: (A) низькі; (B) кімнатні; (C) підвищені; (D) сталі; (E) несталі; (F) циклічні; (G) випадкові.
4. Вплив навколишнього середовища: (A) хімічні; (B) ядерні.

За місцем *руйнування* визначають два типи руйнування: (A) об'ємне; (B) поверхневе.

Для точного опису якого-небудь виду руйнування необхідно вибрати характеристики процесу з вказаного переліку, не випустивши з уваги жодного з трьох основних чинників. Наприклад, для опису руйнування як характерний вияв можна вибрати *пластичну деформацію,* як причини — *стале навантаження* і *кімнатну температуру,* а як тип — *об'ємний тип руйнування.* Таким чином, вказаний вид руйнування можна визначити як об'ємна пластична деформація під дією сталого навантаження при кімнатній температурі. Такий вид руйнування звичайно називається *текучістю.* Відзначимо, однак, що термін *текучістья* звичайно визначає не тільки вказаний вид руйнування: цей термін має більш загальний смисл.

Використовуючи перераховані класи і підкласи трьох основних чинників, що визначають вид руйнування, можна дати визначення інших видів руйнування. Наведений перелік характеристик процесу руйнування потребує додаткового пояснення і конкретизації, особливо стосовно найбезпечніших видів руйнування.

Нижченаведений перелік вміщує види руйнування, що найбільш часто зустрічаються на практиці. Розглядаючи цей перелік, можна помітити, що деякі види руйнування є простим процесом, тоді як інші є складними явищами. Наприклад, в цьому переліку як види руйнування вказані корозія і утомленість, а разом з цим як ще один вид руйнування вказано корозійну втому. Це зроблено тому, що і корозія, і втома часто суттєво впливають на поведінку конструкцій, причому механізми їх дії взаємозв'язані. Це означає, наприклад, що при корозійній втомі корозія прискорює процес руйнування, а дія циклічних втомних навантажень у свою чергу прискорює процес корозії. Наведений перелік вміщує усі відомі види механічного руйнування.

1. Пружна деформація, викликана дією зовнішніх навантажень і (або) температури.
2. Текучість.
3. Бринелірування.
4. В'язке руйнування.
5. Крихке руйнування.
6. Утомленість: (А) багатоциклова; (В) малоциклова; (С) термічна; (D) поверхнева; (Е) ударна; (F) корозійна; (Q) фреттінг-втома.
7. Корозія: (А) хімічна; (В) електрохімічна; (С) щілиста; (D) точкова; (Е) міжкристалічна; (F) виборче вилуговування; (G) ерозійна; (Н) кавітаційна; (І) водневе пошкодження; (J) біологічна; (К) корозія під напругою.
8. Знос: (А) адгезійний; (В) абразивний; (С) корозійний; (D) поверхневий втомний; (Е) деформаційний; (F) ударний; (G) фреттінг-знос.
9. Руйнування при ударі: (А) розрив при ударі; (В) деформація при ударі; (С) ударний знос; (D) ударний фреттінг; (Е) втома при ударі.
10. Фреттінг: (А) фреттінг-втома; (В) фреттінг-знос; (С) фреттінг-корозія.
11. Повзучість.
12. Термічна релаксація.
13. Розрив при короткочасній повзучості.
14. Тепловий удар.
15. Заїдання і схоплювання.
16. Скол.
17. Радіаційне пошкодження.
18. Випучення.
19. Випучення при повзучості.
20. Корозія під напругою.
21. Корозійний знос.
22. Корозійна втома.
23. Повзучість зі втомою.

Нижче дається коротке визначення з відповідними поясненнями видів механічного руйнування.

Пружна деформація, викликана дією зовнішніх навантажень і (або) температур. Цей вид руйнування має місце, коли пружна (оборотна) деформація елемента, виникаюча при дії експлуатаційних навантажень і температур, стає настільки великою, що елемент втрачає здатність виконувати призначену йому функцію.

Текучість має місце, коли пластична (необоротна) деформація пластичного елемента, виникаюча при дії експлуатаційних навантажень, стає настільки великою, що елемент втрачає здатність виконувати призначені йому функції.

Бринелірування, або руйнування вдавлюванням, відбувається, коли статичні зусилля в місці контакту криволінійних поверхонь приводять до появи локальних пластичних деформацій у однієї або у обох дотичних елементів, внаслідок чого відбувається необоротна зміна форми поверхні. Наприклад, якщо шарикопідшипник статично навантажений так, що кулька вдавлюється в обойму, пластично деформуючи її, то поверхня обойми стає хвилястою. При подальшому використовуванні підшипника можуть виникнути неприпустимі вібрації, шум і перегрів, тобто маємо його руйнування.

В'язке руйнування спостерігається, коли пластична деформація пластичного елемента досягає такої величини, що він розділяється на дві частини. Руйнування відбувається в результаті процесу зародження, злиття і розповсюдження внутрішніх пір, поверхня руйнування при цьому гладка і хвиляста.

Крихке руйнування відбувається, коли пружна деформація елемента з крихкого матеріалу досягає такої величини, що руйнуються первинні міжатомні зв'язки і елемент розділяється на дві або більш частини. Внутрішні дефекти і тріщини, що утворюються, швидко розповсюджуються до повного руйнування; поверхня руйнування при цьому нерівна, зерниста.

Термін *втома* застосовується для позначення руйнування у вигляді несподіваного раптового розділення деталі або елемента машини на дві або більш частини в результаті дії протягом деякого часу циклічних навантажень або деформацій. Руйнування відбувається шляхом зародження і розповсюдження тріщини, яка після досягнення деякого критичного розміру стає нестійкою і швидко збільшується, викликаючи руйнування. Навантаження і деформації, при яких звичайно відбувається втомне руйнування, набагато нижче за ті, які приводять до руйнування в статичних умовах. Коли величини навантажень і переміщень такі, що руйнування відбувається більш ніж через 10 тисяч циклів, явище звичайно називається *багатоцикловою втомою.* Коли ж величини навантажень і переміщень такі, що руйнування відбувається менш ніж через 10 000 циклів, явище називається *малоцикловою втомою.*

Коли циклічні навантаження і деформації виникають в деталі в результаті дії циклічно змінного температурного поля, явище звичайно називається *термічною втомою.* Руйнування, зване *поверхневою втомою,* звичайно відбувається за наявності контактуючих поверхонь, що обертаються. Виявляється воно у вигляді піттінгу, розтріскування і фарбування контактуючих поверхонь в результаті дії контактних напружень, під впливом яких на невеликій глибині біля поверхні виникають максимальні по величині циклічні дотичні напруження. Ці напруження приводять до виникнення тріщин, які виходять на поверхню, при цьому деякі частинки матеріалу відділяються.

Це явище часто вважається різновидом зносу.

Корозія — термін, що використовується для позначення широкого класу видів руйнування, при яких деталь або елемент машини втрачає здатність виконувати свою функцію через небажане псування матеріалу в результаті хімічної або електрохімії взаємодії з навколишнім середовищем. Корозійне руйнування часто виявляється у взаємодії з іншими видами руйнування, такими, як знос або втома. Серед багатьох типів корозії відзначимо такі: Хімічна *корозія* є, мабуть, самим загальним типом корозії при безпосередньому контакті поверхні деталі з корозійним середовищем. Хімічна корозія відбувається більш менш рівномірно по всій відкритій поверхні деталі. *Електрохімічна корозія* відбувається, коли два різнорідні метали утворюють частину електричного ланцюга, що замикається розчином електроліту або корозійним середовищем.

Щілиста корозія — в значній мірі локалізований швидкий процес в щілинах, тріщинах або стиках, тобто в місцях, де затримуються малі кількості розчину, який контактує з металом. Точкова *(піттінгова) корозія* є локалізованими діями, в результаті яких відбувається утворення поглиблень і ямок на поверхні металу. Міжкристалічна *корозія* характеризується локальними діями на межах зерен деяких мідних, хромових, нікелевих, алюмінієвих, магнієвих і цинкових сплавів після неправильної термообробки або зварки. Утворення локальних гальванічних осередків, в яких осідають продукти корозії, приводить до істотного зниження міцності матеріалу в результаті міжкристалічної корозії.

Виборче вилуговування є корозійним процесом, в результаті якого із сплаву видаляється який-небудь елемент. Прикладами можуть служити процеси знецинкування латуні і графітизації чавуну. *Ерозіонная корозія* — це швидкоплинний хімічний процес, при якому в результаті дії абразивних речовин або потоків в'язких матеріалів на поверхні матеріалу в місці контакту з корозійним середовищем оголюється свіжий незахищений матеріал. *Кавітаційна корозія* спостерігається, коли під впливом тиску пару пухирці і каверни в рідині лопаються на поверхні матеріалу, внаслідок чого видаляються частинки матеріалу і відкривається доступ корозійному середовищу до свіжого, незахищеного матеріалу.

Водневе пошкодження. До цього виду пошкодження відносяться насичення воднем, водневе окрихчування і зневуглецювання. *Біологічна корозія* є процесом корозії унаслідок активності живих організмів.

Знос є небажаним процесом поступової зміни розмірів унаслідок видалення окремих частинок з контактуючих поверхонь при їх русі, звичайно ковзаючому, щодо один одного. Знос є в основному результатом механічної дії. Це складний процес, точніше навіть ряд різних процесів, які можуть протікати як незалежно, так і взаємозв'язано. Результатом цих процесів є видалення матеріалу з контактуючих поверхонь унаслідок складної взаємодії локальних зсувів, вдавлювань, зварювання матеріалу, розривів і інших механізмів.

Адгезійний знос відбувається в результаті дії високого локального тиску, зварювання між собою шорсткостей поверхонь, подальшої пластичної деформації, виникаючої при їх відносному переміщенні, руйнування локальних зчеплень, видалення або перенесення металу. При *абразивному зносі* частинки видаляються з поверхні в результаті ріжучої або дряпаючої дії нерівностей більш твердої з контактуючих поверхонь або твердих частинок, що затрималися між поверхнями. Коли одночасно виникають умови як для адгезійного, так і для абразивного зносу і корозії, ці процеси взаємодіють між собою і відбувається *корозійний знос.*

Поверхневий втомний знос є зношуванням криволінійних поверхонь, які обертається або ковзаються один відносно одного. При цьому в результаті дії циклічних дотичних напружень на невеликій глибині біля поверхні виникають мікротріщини, що виходять на поверхню, відколюються макрочастки матеріалу і на поверхні утворюються ямки. *Деформаційний знос* відбувається в результаті повторної пластичної деформації поверхонь, що зношуються, що приводить до утворення сітки тріщин, при зростанні і об'єднанні яких утворюються частинки зносу. Деформаційний знос часто спостерігається при дії ударних навантажень. *Ударний знос* має місце при повторній *пружній* деформації в процесі дії ударних навантажень, утворенні сітки тріщин, які ростуть так само, як при поверхневій утомленості.

Руйнування при ударі відбувається, коли в результаті дії несталих навантажень в деталі виникають такі напруження або деформації, що деталь вже не в змозі виконати призначену їй функцію. Руйнування відбувається в результаті взаємодії хвиль напружень і деформацій, які є наслідком динамічної або раптової дії навантажень. Взаємодія хвиль може приводити до виникнення локальних напружень і деформацій, у багато разів перевищуючих виникаючі при статичній дії тих же самих навантажень. Якщо величини напружень і деформацій є такими, що відбувається розділення деталі на дві або більш частин, то маємо розрив *при ударі.* Якщо удар приводить до виникнення неприпустимих пружних або пластичних деформацій, таке руйнування називається деформацією *при ударі.* Якщо при повторних ударах виникають циклічні пружні деформації, внаслідок чого з'являється сітка втомних тріщин, при зростанні яких спостерігається описане раніше явище поверхневої утомленості, то процес називається ударним *зносом.*

Якщо в результаті малих відносних поперечних зсувів двох поверхонь при ударі, які можуть викликатися поперечними деформаціями або дією випадкових малих бічних змін швидкостей, відбувається фреттінг, то руйнування називається *ударним фреттінгом. Втома при ударі* спостерігається, коли руйнування відбувається при повторній дії ударних навантажень внаслідок появи і розповсюдження втомних тріщин.

Фреттінг може відбуватися на поверхні контакту двох твердих тіл, притиснутих один до одного нормальною силою при відносних циклічних рухах малої амплітуди. Фреттінг звичайно має місце в місцях з'єднань, там, де руху не повинно бути, але в результаті дії вібраційних навантажень або деформацій незначні циклічні зсуви все-таки є. При фреттінгу частинки матеріалу, що звичайно відкололися, затримуються між контактуючими поверхнями, оскільки відносні зсуви їх малі.

Фреттинг-втома є передчасним втомним руйнуванням деталі машини, на яку діють циклічні навантаження або деформації в умовах, сприяючих фреттінгу. Поверхневі пошкодження і мікротріщини, що з'являються при фреттінгу. грають роль зародків втомних тріщин, в результаті зростання яких втомне руйнування відбувається при таких навантаженнях, які в інших умовах не викликали б руйнування. Фреттінг-втома – дуже небезпечний і підступний вид руйнування, оскільки фреттінг звичайно відбувається в місцях з'єднань, не доступних для спостереження, і приводить до передчасного або навіть несподіваного (раптового) катастрофічного втомного руйнування.

Фреттінг-знос спостерігається, коли зміни розмірів контактуючих деталей в результаті фреттінгу стають неприпустимо великими або такими, що з'являються концентратори напружень і локальні напруження перевищують допустимий рівень. *Фреттінг-корозія* відбувається, коли в результаті фреттінгу властивості матеріалу деталі погіршуються настільки, що вона не може виконувати своїх функцій.

Руйнування в результаті *повзучості* відбувається, коли пластична деформація елемента машини або конструкції, накопичена протягом деякого часу дії напружень і температури, приводить до змін розмірів, внаслідок яких елемент не може задовільно виконувати призначену йому функцію. Процес повзучості, як правило, можна розділити на три стадії: (1) несталу, або первинну, повзучість, під час якої швидкість деформації зменшується; (2) сталу, або повторну, повзучість, під час якої швидкість деформації практично стала, і (3) третинну повзучість, при якій швидкість деформації повзучості збільшується (часто досить швидко) аж до руйнування. Такий вид руйнування часто називається розривом *при повзучості.* Відбудеться чи ні таке руйнування — залежить від характеру зміни в часі напружень і температури.

Термічна релаксація спостерігається, коли в процесі повзучості, що приводить до релаксації заздалегідь напруженої або деформованої деталі, її розміри змінюються так, що деталь вже не може виконувати призначеної їй функції. Наприклад, якщо заздалегідь напружені болти судна тиску, працюючого в умовах високих температур, релаксуют унаслідок повзучості так, що навантаження від максимального тиску перевищує попереднє навантаження і герметичність з'єднання порушується, кажуть, що болти руйнуються внаслідок термічної релаксації.

Розриви при короткочасній повзучості– процес, тісно пов'язаний з процесом повзучості, проте при цьому залежність напружень і температури від часу така, що елемент розділяється на дві частини. При цьому напруження і температура, як правило, такі, що період сталої повзучості є дуже нетривалим або зовсім відсутнім.

Тепловий удар відбувається, коли градієнти виникаючого в деталі температурного поля настільки великі, що внаслідок перепадів температурних деформацій починається текучість або руйнування.

Заїдання спостерігається у разі, коли на дві ковзаючі один по одному поверхні діють такі навантаження і температури, а швидкість ковзання, мастило і умови навколишнього середовища такі, що в результаті значної пластичної деформації поверхонь, їх зварювання, відламування і дряпаючої дії відбувається істотна деструкція поверхні і перенесення металу з однієї поверхні на іншу. Заїдання можна вважати дуже інтенсивним процесом адгезійного зносу. Коли вказані процеси приводять до значного послаблення з'єднання або, навпаки, до схоплювання, говорять, що з'єднання руйнується в результаті заїдання. *Схоплювання* є, по суті, інтенсивним процесом заїдання, при якому контактуючі деталі практично зварюються і їх відносне переміщення стає неможливим.

Руйнування сколом відбувається, коли від поверхні деталі мимовільно відділяється частина матеріалу, внаслідок чого нормальна працездатність елемента машини втрачається. Наприклад, бронеплита руйнується в результаті сколу, коли при ударі снаряда об зовнішню поверхню бронезахисту в плиті виникають хвилі напружень, що приводять до сколу з внутрішньої сторони частини матеріалу, яка сама стає смертоносним снарядом. Іншим прикладом руйнування сколом може служити руйнування підшипників кочення або зубів шестерень внаслідок описаного раніше явища поверхневої втоми.

Руйнування внаслідок радіаційного пошкодження означає, що при радіаційному опромінюванні відбулися такі зміни властивостей матеріалу, що деталь вже не може виконувати свої функції. Звичайно ці зміни пов'язані з втратою пластичності в результаті опромінювання і служать причиною початку процесу руйнування того або іншого виду. Еластомери і полімери звичайно більш схильні до радіаційного пошкодження, ніж метали, причому характеристики міцності останніх після радіаційного опромінювання іноді поліпшуються, хоча пластичність, як правило, зменшується.

Руйнування при втраті стійкості спостерігається, коли при деякій критичній комбінації величини і (або) місця додатку навантаження, а також форми і розмірів деталі її переміщення або прогинання раптово різко збільшуються при малій зміні навантаження. Така нелінійна поведінка приводить до руйнування, якщо при втраті стійкості деталь вже не може виконувати свої функції.

Руйнування внаслідок вигину при повзучості відбувається, коли після закінчення деякого часу в результаті процесу повзучості виникає нестійкий стан, тобто навантаження і геометричні параметри деталі стають такими, що втрачається стійкість і відбувається руйнування.

Руйнування в результаті корозії під напруженням спостерігається, коли діючі напруження приводять до виникнення локальних поверхневих тріщин, які з’являються звичайно уздовж меж зерен, в деталі, що знаходиться в корозійному середовищі. Часто утворення тріщин ініціює початок процесів руйнування інших видів. Руйнування в результаті корозії під напруженням є дуже небезпечним видом корозійного руйнування, оскільки до нього схильні багато металів. Чавуни, сталі, неіржавіючі сталі, мідні і алюмінієві сплави схильні корозійному розтріскуванню під напруженням в деяких корозійних середовищах.

Руйнування внаслідок корозійного зносу є складним видом руйнування, при якому несприятливі наслідки корозії і зносу приводять спільно до втрати працездатності деталі. В процесі корозії часто утворюються тверді абразивні частинки, які прискорюють зношування, а в процесі зношування у свою чергу з поверхні постійно віддаляються захисні шари і оголюється свіжий метал, що прискорює корозію. Взаємний вплив цих процесів один на одного істотно підвищує небезпеку руйнування.

Корозійна втома є складним видом руйнування, при якому спільно проявляються несприятливі ефекти корозії і втоми, що приводить до руйнування. В процесі корозії на поверхні металу часто утворюються ямки, що служать концентраторами напружень. В результаті концентрації напружень процес втомного руйнування швидшає. Крім того, тріщини в крихкому шарі продуктів корозії служать зародками втомних тріщин, що розповсюджуються в основний метал. З другого боку, в результаті дії циклічних напружень або деформацій відбувається розтріскування і відшаровування продуктів корозії, тобто відкривається доступ корозійному середовищу до свіжого металу. Таким чином, обидва процеси прискорюють один одного, і небезпека руйнування збільшується.

Руйнування внаслідок повзучості і втоми є видом руйнування, що відбувається в умовах, при яких які виникають одночасно і втома, і повзучість. Взаємодія процесів повзучості і втоми вивчена поки недостатньо, але вони можуть підсилювати дію одне одного.

Предметом даного курсу є механіка руйнування, що розглядає руйнування як процес появи і зростання тріщин у матеріалі, який вважається суцільним середовищем, тобто механіка тріщин розглядається як частина механіки твердого деформівного тіла.

Лекція 2а Основи механіки твердого деформівного тіла

У 1822 і 1823 рр. французькими вченими Нав'є і Коші було подано в Паризьку академію наукові трактати або, як їх тоді називали, мемуари, якими було покладено початок двом підходам до розгляду механічних властивостей твердих тел. Перший, заснований на розгляді тіла як системи взаємодіючих між собою молекул, привів до досить строгих фізичних теорій механічних властивостей кристалів різної будови. Другий – так званий континуальний підхід, полягав в заміні реального тіла уявним суцільним середовищем, безперервно заповнюючим об'єм тіла. Рівняння рівноваги були отримані Коші за допомогою запропонованого Ейлером методу виділення елементарного об'єму і розгляду діючих на нього сил. Для опису поведінки суцільного середовища пропонувалися визначальні рівняння, які пов'язували введені умовні сили (напруження) і деформації у кожній точці об'єму Модель такого середовища вважається придатною для розрахунку процесів в реальних тілах, якщо результати цього розрахунку з достатньою точністю відповідають результатам макроскопічного експерименту, у якому вимірюються так звані механічні характеристики, що входять в рівняння.

Такі моделі називаються феноменологічними, вони є основою для побудови механіки суцільного середовища. Фізикам більше подобається перший підхід, вони вважають теорії, в яких фігурують атоми і молекули більш адекватними реальній дійсності. Можливо ця справа смаку, проте не слід забувати, що в теорії ми маємо справу не з самим атомом, а з деякою його моделлю, що більш менш точно описує поведінку реального об'єкту. Так що феноменологічний підхід є не менше чесним, ніж атомно-молекулярний. Важливо тільки пам'ятати про гіпотези, покладені в основу моделі, і про межі її застосування. Так, сама гіпотеза континууму (тобто суцільного середовища) втрачає справедливість, якщо мова йде про об'єкти, розміри яких наближаються до молекулярних, наприклад, про таке важливе для механіки руйнування поняття, як вершина тріщини. Пізніше ми побачимо, що згідно з моделлю пружного тіла у вершині гострого розрізу мають місце нескінченні напруження. До такого результату, зрозуміло, слід відноситися критично, воно є лише наслідком прийнятих гіпотез. Однак сама модель в цілому матиме повне право на існування, якщо вона правильно описує те, що вона повинна описувати, а саме руйнування тіла з розрізом, граничні навантаження, швидкості розповсюдження тріщин і довговічність тіла з тріщиною. Розуміння фізики процесу буває корисним і для механіки, іноді воно може підказати вибір належної феноменологічної моделі або ж вказати межі її застосування. "Для побудови механічної теорії достатньо даних макроексперименту, тоді як звернення до фізики може бути корисним для додаткових міркувань ", – говорив академік Ю. Н. Работнов. Механіка твердого деформівного тіла базується в основному на введеному Коші понятті суцільного середовища. Механіка руйнування, як наука про руйнування конструкцій внаслідок розвитку тріщин, теж базується на гіпотезах Коші, тобто є частиною механіки твердого деформівного тіла (МТДТ). У зв'язку з цим корисно розглянути основні положення МТДТ і ті припущення, які покладені в основу класичних гіпотез про міцність конструкцій.

1.1.1Тензор напружень

Розглянемо довільне тіло з накладеними на нього в'язями, яке знаходиться під дією поверхневих і об'ємних навантажень (рис. 1.1).

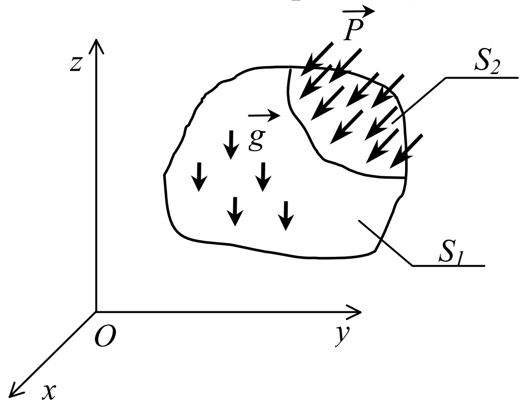


Рис. 1.1 – Довільне тіло під дією навантажень

Поверхневі і масові сили визначаються їх інтенсивностями, які в загальному випадку залежать від координат *x*, *y*, *z*, пов'язаних з тілом. Проекції поверхневих сил на осі координат позначимо p_x, p_y, p_z, а проекції масових сил – q_x, q_y, q_z.

Під дією масових навантажень у тілі з'являються внутрішні сили взаємодії – напруження. Напруження є умовними силами, які введені у механіці суцільного середовища як заміна атомних і молекулярних сил. Напруження діють у кожній площадці, виділеній в об'ємі, залежать від орієнтації площадки, проведеної через дану точку і визначаються у деякій точці *К* як границя відношення середньої сили, діючої у площадці, до величини цієї площадки, якщо остання стягується у точку *К*

$$\vec{p} = \lim \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta A}, \quad \Delta A \to 0.$$

Означене таким чином напруження є вектором.

Множина напружень у площадках, проведених через дану точку, називається напруженим станом у точці.

Напружений стан у точці можна описати, задаючи вектори напружень у трьох взаємно перпендикулярних площадках, проведених через дану точку (рис. 1.2,а,в). Для зручності й наочності замість цих трьох площадок розглядають грані куба, виділеного в околі точки (рис. 1.2,г). Розкладаючи вектори напружень у кожній з граней на складові по координатних осях, одержимо дев'ять компонент напружень, що діють на гранях куба, і складаємо матрицю

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

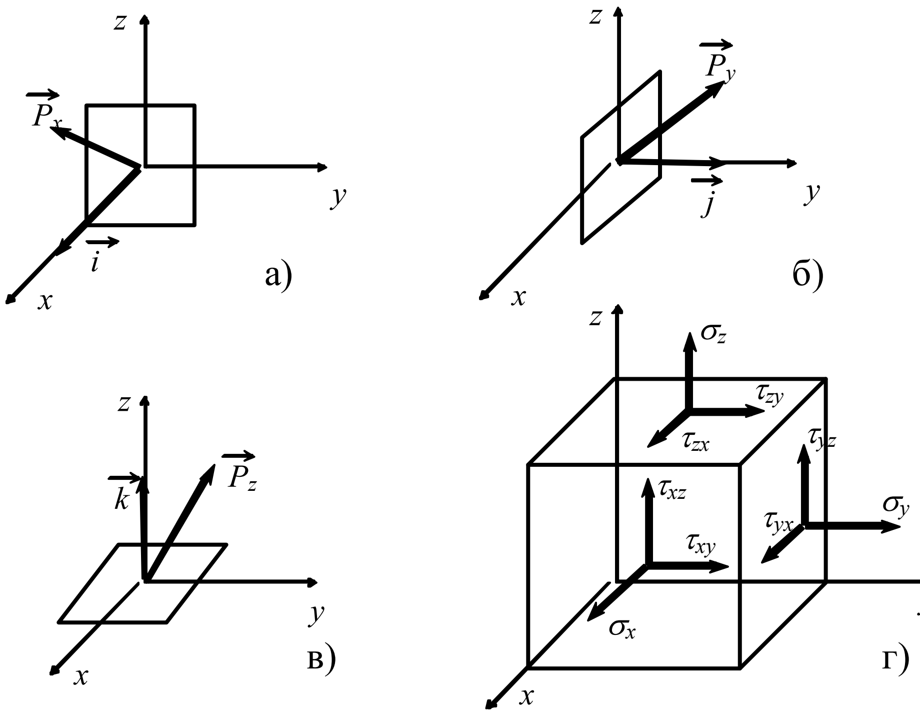


Рис. 1.2 – Моделювання напруженого стану у точці

Додатні напрямки напружень збігаються з напрямами координатних осей.

Оскільки через точку можна провести нескінченну кількість площадок, то в одній і тій самій точці можна записати нескінченну кількість матриць типу (1.1). Кожну з цих матриць можна розглядати як проекції деякого математичного об'єкта – тензора. У тривимірній системі координат тензор, має своїми компонентами вектори напружень, діючих у трьох взаємно перпендикулярних площадках (тобто на гранях умовного куба, (рис. 1.2г)).

У векторній нотації

$$\vec{T}_\sigma = \vec{P}_x\vec{i} + \vec{P}_y\vec{j} + \vec{P}_z\vec{k}\,. \tag{1.2}$$

Таким чином можна говорити, ***що напружений стан у точці визначається тензором $\vec{T}_\sigma$, а напружений стан у кожній площадці, яка проведена через цю точку, – вектором $\vec{P}_n$, де $\vec{n}$ – вектор нормалі до площадки.***

Маючи одну з проекцій тензора напружень, можна знайти вектор напружень у довільній площадці (рис. 1.3) з вектором напрямної нормалі $\vec{n}$. Розглянемо для цього елементарний тетраедр з вершиною в точці *O*. Очевидно, площі граней, що збігаються з координатними площинами, дорівнюють dSn_x, dSn_y, dSn_z, де $n_x = \cos\alpha$, $n_y = \cos\beta$, $n_z = \cos\gamma$.

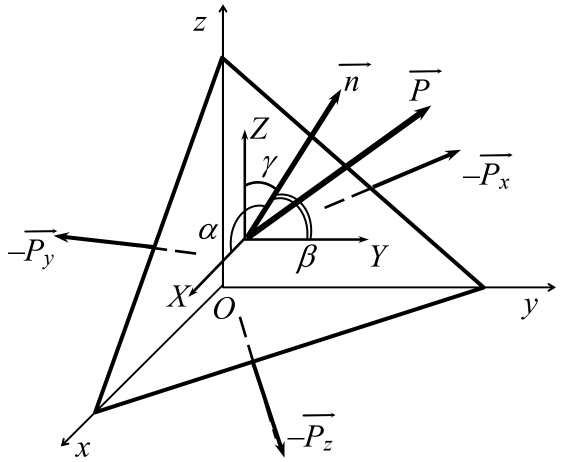


Рис. 1.3 – Напруження у довільній площадці

Рівняння рівноваги сил, що діють на тетраедр (рис. 1.3),

$$\vec{P}dS = \vec{P}_x dS n_x + \vec{P}_y dS n_y + \vec{P}_z dS n_z, \tag{1.3}$$

у матричній формі

$$\mathbf{p} = \mathbf{T}_\sigma \mathbf{n}, \tag{1.4}$$

де $\mathbf{p} = \{X \quad Y \quad Z\}^T$; X, Y, Z – проекції вектора $\vec{p}$ на осі x, y, z; $\mathbf{n} = \{n_1 \quad n_2 \quad n_3\}^T$.

Таким чином, щоб визначити компоненти вектора напружень у площадці, необхідно помножити матрицю тензора напружень на вектор напрямних косинусів нормалі до площадки. Компоненти вектора **p**, паралельні осям x, y, z, не перпендикулярні й не дотичні до площадки, а отже не зовсім зручні для характеристики напружень у площадці. Тому знайдемо нормальні й дотичні компоненти вектора **p**. Проекція вектора **p** на нормаль визначається як скалярний добуток

$$\sigma_n = \vec{p} \cdot \vec{n},$$

або у матричній формі

$$\sigma_n = \mathbf{n}^T \mathbf{T}_\sigma \mathbf{n}. \tag{1.5}$$

Дотичні напруження

$$. \ \tau_n = \sqrt{\vec{p}^{\,2} - \sigma_n^2} = \sqrt{\mathbf{n}^T \mathbf{T}_\sigma \mathbf{T}_\sigma^T \mathbf{n} - (\mathbf{n}^T \mathbf{T}_\sigma \mathbf{n})^2}. \tag{1.6}$$

Для визначення напружень у площадці і компонент тензора напружень у нових координатних осях згідно з (1.5), (1.6) можна скористатись безпосередньо операторами системи MathCAD.

Покажемо, як за однією проекцією тензора (тобто матрицею $\mathbf{T}_\sigma$) можна знайти всі інші проекції. Розглянемо дві ортогональні декартові системи координат $Oxyz, Ox'y'z'$ (рис. 1.4). Взаємне положення осей визначимо матрицею напрямних косинусів

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \tag{1.7}$$

$$\alpha_{11}=\cos(x',x),\quad \alpha_{12}=\cos(x',y),\quad \alpha_{13}=\cos(x',z),$$
$$\alpha_{21}=\cos(y',x),\quad \alpha_{22}=\cos(y',y),\quad \alpha_{23}=\cos(y',z),$$
$$\alpha_{31}=\cos(z',x),\quad \alpha_{32}=\cos(z',y),\quad \alpha_{33}=\cos(z',z).$$

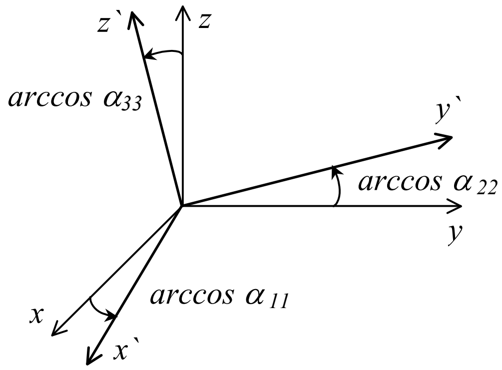


Рис. 1.4 – Декартова система координат при повороті осей

Визначимо нормальне напруження у деякій похилій площадці, яка має вектори направляючих нормалей у двох системах координат $Oxyz, Ox'y'z'$ відповідно $\mathbf{n}$ і $\mathbf{n}'$. Згідно з правилом перетворення вектора при повороті координат, залежність між цими векторами має вигляд

$$\mathbf{n}'=\mathbf{\Lambda n},\quad \mathbf{n}=\mathbf{\Lambda}^T\mathbf{n}'. \tag{1.8}$$

Згідно з формулою (1.5), –

$$\boldsymbol{\sigma}_{n'}=\mathbf{n}'^T\mathbf{T}_\sigma\mathbf{n}'=\mathbf{n}^T\mathbf{T}_\sigma\mathbf{n}=(\mathbf{\Lambda}^T\mathbf{n}')^T\mathbf{T}_\sigma\mathbf{\Lambda}^T\mathbf{n}'=\mathbf{n}'^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{T}_\sigma\mathbf{\Lambda}^T\mathbf{n}'.$$

Порівнюючи далі у цьому виразі першу формулу і останню, одержимо залежність між компонентами тензора напружень при повороті системи координат

$$\mathbf{T}'_{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{\Lambda}\mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{\Lambda}^T. \tag{1.9}$$

1.1.2 Головні напруження і головні площадки

З нескінченної кількості похилих площадок можна знайти такі, на яких відсутні дотичні напруження, тобто діють лише нормальні напруження. Ці площадки, а також напруження, що діють у них, називають головними. Для кожної такої площадки можна записати

$$\vec{p}=\sigma\,\vec{n}, \tag{1.10}$$

де σ – модуль вектора напружень.

Враховуючи (1.4), з (1.10) дістанемо

$$(\mathbf{T}_\sigma-\sigma\,\mathbf{E})\,\mathbf{n}=\mathbf{0}. \tag{1.11}$$

Матричне рівняння (2.11) містить три скалярні рівняння. Система однорідних рівнянь (1.11) має ненульові розв'язки лише тоді, коли $\det(\mathbf{T}_\sigma-\sigma\,\mathbf{E})=0$. Розкривши визначник, отримаємо многочлен третього степеня відносно σ (характеристичне рівняння матриці $\mathbf{T}_\sigma$)

$$\sigma^3-\Sigma_1\sigma^2+\Sigma_2\sigma-\Sigma_3=0, \tag{1.12}$$

де $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ – інваріанти напруженого стану:

$$\Sigma_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$

$$\Sigma_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix};$$

$$\Sigma_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \qquad (1.13)$$

Корені рівняння (1.12) є власними значеннями матриці $\mathbf{T}_\sigma$ і головними напруженнями, які відшукуються. Можна показати, що три головні напруження діють у взаємно перпендикулярних площадках, а матриця тензора напружень у головних осях буде діагональною

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \qquad (1.14)$$

Оскільки, як буде показано далі, матриця $\mathbf{T}_\sigma$ симетрична відносно головної діагоналі, характеристичне рівняння (2.10) завжди має дійсні корені, хоча серед них можуть бути й нульові.

Якщо $\Sigma_3 = 0$, рівняння (1.12) має один нульовий корінь, а два інші визначаються з рівняння

$$\sigma(\sigma^2 - \Sigma_1\sigma + \Sigma_2) = 0, \qquad (1.15)$$

звідки

$$\sigma = 0, \quad \sigma = \frac{\Sigma_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Sigma_1}{2}\right)^2 - \Sigma_2}.$$

Якщо $\Sigma_3 = \Sigma_2 = 0$, рівняння (1.10) має лише один ненульовий корінь $\sigma = \Sigma_1$.

Напружений стан, при якому одне з трьох головних напружень дорівнює нулю, називають плоским, а якщо два напруження нульові – лінійним, або одновісним. У загальному випадку напружений стан називають об'ємним.

Для визначення головних напружень, можна скористатися програмами розв'язування кубічного рівняння (1.12) або методами визначення власних значень матриці $\mathbf{T}_\sigma$, не пов'язаними з утворенням характеристичного рівняння. Кожному з головних напружень відповідає напрям, для якого напрямні косинуси подаються як розв'язки системи рівнянь

$$(\mathbf{T}_\sigma - \sigma_i \mathbf{E})\,\mathbf{n}_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \qquad (1.16)$$

де $\mathbf{n}_i = \{ n_{1i} \;\; n_{2i} \;\; n_{3i} \}^T$ – вектори напрямних косинусів площадок з головним напруженням σ_i, $\mathbf{E}$ – одинична матриця.

Наприклад, вектор напрямних косинусів до площадки, де діє головне напруження σ_1, є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{aligned}(\sigma_x-\sigma_1)n_{11}+\tau_{xy}n_{21}+\tau_{xz}n_{31}&=0;\\ \tau_{yx}n_{11}+(\sigma_y-\sigma_1)n_{21}+\tau_{yz}n_{31}&=0;\\ \tau_{zx}n_{11}+\tau_{zy}n_{21}+(\sigma_z-\sigma_1)n_{31}&=0,\end{aligned} \qquad \mathbf{(1.17)}$$

за умови

$$n_{11}^2+n_{21}^2+n_{31}^2=1.$$

У розрахунках на міцність широко використовуються дві характерні складові тензора напружень: шаровий тензор $\vec{Ш}_\sigma$ і тензор-девіатор $\vec{D}_\sigma$, матриці яких мають вигляд

$$\mathbf{Ш}_\sigma=\begin{bmatrix}\sigma_c & 0 & 0\\ 0 & \sigma_c & 0\\ 0 & 0 & \sigma_c\end{bmatrix},\quad \mathbf{D}_\sigma=\begin{bmatrix}\sigma_x-\sigma_c & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma_c & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma_c\end{bmatrix}, \qquad (1.18)$$

$$\sigma_c=\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z).$$

Скористаємось виразами для інваріантів тензора напружень і запишемо інваріанти цих двох тензорів

$$I_1^{Ш}=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=3\sigma_c,\quad I_2^{Ш}=3\sigma_c^2,\quad I_3^{Ш}=\sigma_c^3,$$

$$I_1^D=0,\quad I_2^D=\frac{1}{6}[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)],$$

$$I_3^D=\left\|\begin{matrix}\sigma_x-\sigma_c & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma_c & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma_c\end{matrix}\right\|. \qquad (1.19)$$

У теорії пластичності широко використовується поняття інтенсивності дотичних напружень τ_i, яка визначається як $\tau_i=\sqrt{I_2^D}$.

1.1.3 **Переміщення і деформації**

При навантаженні тіла у ньому відбувається зміна відносного положення точок об'єму. Кожна точка переміщується на деяку величину, проекції якої на осі координат, пов'язані з тілом, позначимо u, v, w.

Матрицю $\{u \;\; v \;\; w\}^T$ називають вектором переміщень у точці.

$$\mathbf{u}=\{u \quad v \quad w\}^T. \qquad (1.20)$$

Переміщення u, v, w є функціями координат, тобто в різних точках неоднакові. Неоднаковість переміщень у сусідніх точках у загальному випадку призводить до появи деформацій.

Розглянемо переміщення елементарного направленого відрізка $d\mathbf{s}$, виділеного в деякому об’ємі V (рис. 1.6). Якщо переміщення точки А позначити $\mathbf{u}$, то переміщення точки B відрізнятимуться від $\mathbf{u}$ на величину $d\mathbf{u}$, зумовлену приростом вектора координат $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$ при переході від A до B. Нова довжина відрізка AB

$$d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r} + \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \qquad (1.21)$$

де $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}} d\mathbf{r}$ – векторна похідна векторної функції $\mathbf{u}$.

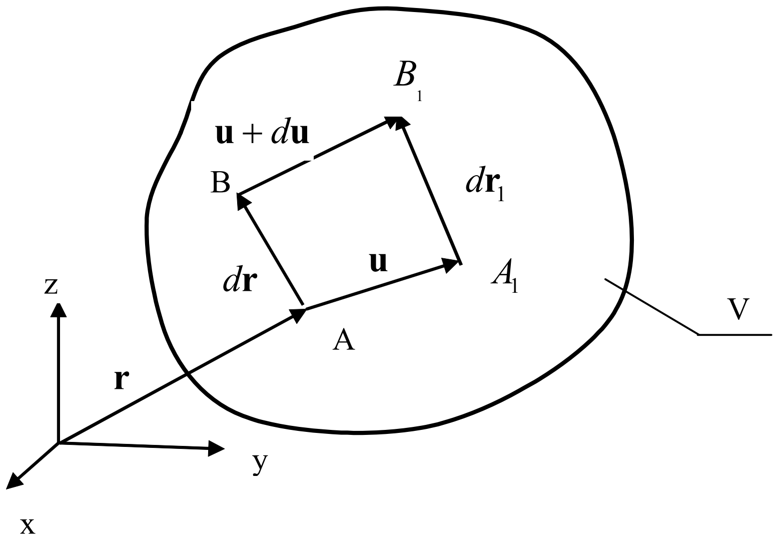


Рис. 1.5 – Схема переміщень в околі точки A

Відносна зміна вектора $d\mathbf{r}$ (векторна похідна векторної функції) буде тензором другого рангу

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}}{d\mathbf{r}} = \frac{1}{d\mathbf{r}}(d\mathbf{r} + \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}} d\mathbf{r} - d\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}. \qquad (1.22)$$

Матриця цього тензора –

$$T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \qquad (1.23)$$

Розкладемо матрицю T на симетричну і асиметричну матриці

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{T} + \mathbf{T}^T}{2} + \frac{\mathbf{T} - \mathbf{T}^T}{2}. \qquad (1.22)$$

Перший доданок у розкладенні (1.22) (симетрична частина тензора $\mathbf{T}$) характеризує деформації у точках об’єму V і є, власне, тензором деформації.

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \qquad (1.23)$$

Асиметрична частина тензора **T** визначає поворот елемента об'єму у просторі як твердого тіла.

$$T_\theta = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}) & 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}) & 0 \end{bmatrix}. \qquad (1.24)$$

Симетрія тензора деформацій дозволяє записати його компоненти у вигляді вектора

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z\ \gamma_{yz}\ \gamma_{zx}\ \gamma_{xy})^T, \qquad (1.25)$$

де

відносні лінійні деформації у напрямках осей x, y, z

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \qquad (1.26)$$

Кутові деформації характеризують зміну прямих кутів у площинах, паралельних координатним

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (1.27)$$

Таким чином, маємо шість залежностей (1.26), (1.27), які пов'язують деформації та переміщення у точках об'єму тіла, що деформується. Ці залежності називають формулами Коші. Шість деформацій можна розглядати як компоненти тензора деформацій з матрицею

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \qquad (1.28)$$

Оскільки тензор $\vec{T}_\varepsilon$, так само як і тензор напружень $\vec{T}_\sigma$, є тензорами другого рангу, і структура їх однакова, усі формули й висновки, одержані раніше для $\vec{T}_\sigma$, можна записати і для $\vec{T}_\varepsilon$.

Залежності між векторами деформацій й переміщень можна записати в матричній формі

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\,\mathbf{u}, \tag{1.29}$$

де **A** – матриця диференційних операторів

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T. \tag{1.30}$$

По аналогії з теорією напруженого стану можна показати, що в кожній точці мають місце три взаємно перпендикулярних напрямки, в яких об'єм тільки розтягується або стискається, а деформації зсуву відсутні. Ці деформації називають головними. Вони визначаються як корені кубічного рівняння

$$\varepsilon^3 - I_1\varepsilon^2 + I_2\varepsilon - I_3 = 0, \tag{1.31}$$

де I_1, I_2, I_3 – інваріанти тензора деформацій

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \varepsilon_z \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \tag{1.32}$$

Матриця шарового тензора деформації –

$$\mathbf{Ш}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_c & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_c & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_c \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_c = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z). \tag{1.33}$$

Матриця девіатора –

$$\mathbf{D}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_c & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_c & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_c \end{bmatrix}. \tag{1.34}$$

Шаровий тензор деформацій характеризує об'ємну деформацію у точці тіла, а девіатор – деформацію зміни форми. Зокрема, перший інваріант шарового тензора

$$I_1^{Ш} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \tag{1.35}$$

характеризує відносну зміну об'єму.

Другий інваріант девіатора деформацій –

$$I_2^D = \frac{1}{6}[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)]. \tag{1.36}$$

Перший інваріант шарового тензора можна зв'язати з осьовою деформацією в напрямку, перпендикулярному октаедричній площадці

$$\varepsilon_{окт} = \varepsilon_c = I_1/3, \tag{1.37}$$

а другий інваріант девіатора I_2^D – з кутом зсуву на цій же площадці

$$\gamma_{окт} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \tag{1.38}$$

У теорії пластичності використовується поняття інтенсивності деформацій зсуву γ_i, яке визначається як

$$\gamma_i = 2\sqrt{I_2^D} = \sqrt{\frac{2}{3}[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)]}, \tag{1.39}$$

а також інтенсивності подовжніх деформацій

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \tag{1.40}$$

1.1.4 Рівняння рівноваги елементарного об’єму

Щоб одержати залежності між напруженнями в довільній точці об'єму, розглянемо елементарний паралелепіпед, виділений в околі точки (рисунок 1.6). Внаслідок змінності напружень вздовж осей *x, y, z,* вектори напружень у площадках, віддалених від координатних на відстані *dx, dy, dz,* відрізнятимуться від тих, що діють у координатних площадках, на величину приросту, пов'язаного з приростом відповідних координат. Крім напружень, у площадках на елемент можуть діяти й масові сили, вектор яких $\vec{p}dxdydz$. Оскільки елемент в об'ємі перебуває в рівновазі, його можна виділити окремо й виконати відповідну заміну в'язей (у даному разі напруженнями на площадках і об'ємними силами). Ця операція ґрунтується на аксіомі звільнення від в'язей, яка розглядається в курсі теоретичної механіки.

Умови рівноваги елемента (рівність нулю головного вектора і головного моменту сил, які діють на нього) приводять до таких рівнянь:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x}\vec{p}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{p}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{p}_z + \vec{p} = 0, \\ \tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \end{gathered} \tag{1.41}$$

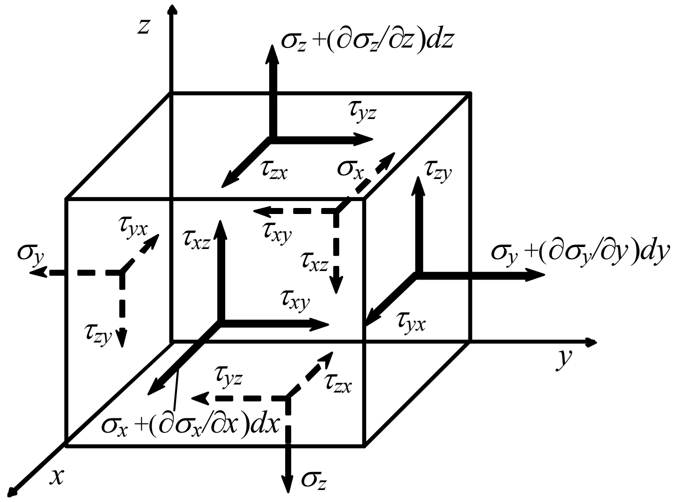


Рис. 1.6 – Елементарний паралелепіпед в околі точки

Перше і називають, власне, рівнянням рівноваги. У матричній формі його можна записати так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \tau_{yx}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix}+\frac{\partial}{\partial y}\begin{Bmatrix}\tau_{xy}\\ \sigma_y\\ \tau_{zy}\end{Bmatrix}+\frac{\partial}{\partial z}\begin{Bmatrix}\tau_{xz}\\ \tau_{yz}\\ \sigma_z\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}X_V\\ Y_V\\ Z_V\end{Bmatrix}=\{0\}. \qquad (1.42)$$

Останні три рівності у (1.41) називають законом парності дотичних напружень

$$\begin{Bmatrix}\tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\tau_{yx}\\ \tau_{zy}\\ \tau_{xz}\end{Bmatrix}. \qquad (1.43)$$

З нього випливає, що з дев’яти компонент матриці тензора напружень лише шість є незалежними (матриця $\mathbf{T}_\sigma$ симетрична відносно головної діагоналі). Це дає змогу записати незалежні компоненти тензора напружень у формі вектора-стовпця, аналогічно вектору деформацій

$$\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_x \;\; \sigma_y \;\; \sigma_z \;\; \tau_{xy} \;\; \tau_{yz} \;\; \tau_{zx}\}^T. \qquad (1.43)$$

З урахуванням цього позначення рівняння рівноваги можна подати у вигляді

$$\mathbf{A}^T\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{p}_V=\mathbf{0}, \qquad (1.44)$$

де $\mathbf{p}_V=\{X_V \;\; Y_V \;\; Z_V\}^T$,

$\mathbf{A}$ – матриця диференційних операторів (1.30).

1.4.3 Умови сумісності деформацій

Якщо потрібно знайти переміщення за відомими деформаціями, формули Коші необхідно розв'язати відносно переміщень. Але в цьому разі три невідомі вектора переміщень знаходяться за шістьма компонентами вектора деформацій і для однозначності розв'язку необхідно накласти на деформації такі умови :

$$\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x}=\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z},\tag{1.45}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x\partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}.$$

Ці залежності називають рівняннями Сен-Венана. Якщо вони задовольняються, то в кожній точці об'єму переміщення є однозначними функціями, тобто при деформуванні об'єму не виникає розривів і пустот. У матричній формі вони мають такий вигляд

$$\mathbf{B}\,\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0},\tag{1.46}$$

де **B** – матриця диференціальних операторів

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\partial_{yy} & \partial_{xx} & 0 & -\partial_{xy} & 0 & 0\\ 0 & \partial_{zz} & \partial_{yy} & 0 & -\partial_{yz} & 0\\ \partial_{zz} & 0 & \partial_{xx} & 0 & 0 & -\partial_{xz}\\ 2\partial_{yz} & 0 & 0 & -\partial_{xz} & \partial_{xx} & -\partial_{xy}\\ 0 & 2\partial_{zx} & 0 & -\partial_{yz} & -\partial_{yx} & \partial_{yy}\\ 0 & 0 & 2\partial_{xy} & \partial_{zz} & -\partial_{zx} & -\partial_{zy}\end{bmatrix},\tag{1.47}$$

$$\partial_{yy}=\frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad \partial_{xx}=\frac{\partial^2}{\partial x^2},\quad \partial_{xy}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\ \text{і т. д.}$$

1.1.5 Фізичні залежності

Зв'язок між напруженнями і деформаціями описується так званими фізичними залежностями. Їх вигляд визначається властивостями матеріалу, а також умовами навантаження. Найпростішою формою зв'язку є лінійна залежність між деформаціями й напруженнями. Для одновісного напруженого стану ізотропного матеріалу

$$\sigma_x=E\varepsilon_x,\tag{1.48}$$

(E – модуль пружності, *Па*).

У загальному випадку об'ємного напруженого стану ці залежності зручно записати у матричній формі, маючи на увазі векторні позначення для напружень і деформацій:

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{C}\,\boldsymbol{\varepsilon},\tag{1.49}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}.\tag{1.50}$$

Матрицю **C** називають матрицею пружних модулів. Для ізотропних матеріалів –

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2G+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \qquad (1.51)$$

Обернена до неї матриця матиме вигляд

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}, \qquad (1.52)$$

де ν – коефіцієнт Пуассона, $G = E/2(1+\nu)$ – модуль зсуву,

$\lambda = 2\nu G/(1-2\nu)$ – параметр Ляме.

Обидві матриці симетричні відносно головної діагоналі, компоненти залежать від двох констант – модуля пружності E і коефіцієнта Пуассона ν, – або величин, похідних від цих двох. Зауважимо, що для анізотропних матеріалів кількість незалежних констант збільшується і в загальному випадку може дорівнювати 21. Матриця С має вигляд

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix}. \qquad (1.53)$$

При наявності елементів симетрії пружних властивостей кількість незалежних констант буде зменшуватися [А]. Так для матеріалу , для якого існує площина симетрії пружних властивостей, наприклад *x,O,y*, компоненти c_{ij} інваріантні відносно перетворення координат

$$x' = x,\ y' = y,\ z' = -z\ .$$

Матриця пружних модулів матиме вигляд

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} & 0 \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (1.54)$$

Якщо матеріал має три взаємно перпендикулярні площини симетрії (тобто вісь симетрії), він називається орторопним. Матриця модулів у системі координат,для якої координатні площини є площинами симетрії, має вигляд

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}, \quad (1.55)$$

1.1.6 Потенційна енергія деформації

При спробах змінити об'єм чи форму тіла, виготовленого з пружного матеріалу, виникають напруження, які протидіють цим змінам. Таким чином, у деформованому пружному тілі завжди є внутрішні сили – напруження, які за відповідних умов виконують роботу. Можна сказати, що в деформованому тілі за рахунок пружних деформацій нагромаджується потенціальна енергія. Для одиничного куба, на гранях якого діють головні напруження, цю енергію можна знайти як суму робіт прикладених до нього сил. У головних осях –

$$a = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3,$$

або

$$a = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}, \quad (1.54)$$

де $\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ 0\ 0\ 0\right]^T, \sigma = [\sigma_1\ \sigma\ _2\sigma\ _3 0\ 0\ 0]^T$.

Вираз (1.49) можна використати і в загальному випадку, коли розглядається довільна система координат. При цьому ε, σ будуть шестивимірними векторами без нульових компонент. Потенціальна енергія для тіла в цілому, обчислюється об'ємним інтегралом

$$U = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\, dV. \quad (1.55)$$

1.1.7 Основні залежності плоскої задачі напруженого стану

У тонкостінних елементах конструкцій, зокрема пластин, при дії сил, прикладених по контуру, має місце плоский напружений стан. Уявимо собі плоску пластину, завантажену силами у її площині (рисунок 1.7а). Товщину пластин h вважаємо малою порівняно з габаритними розмірами a і b.

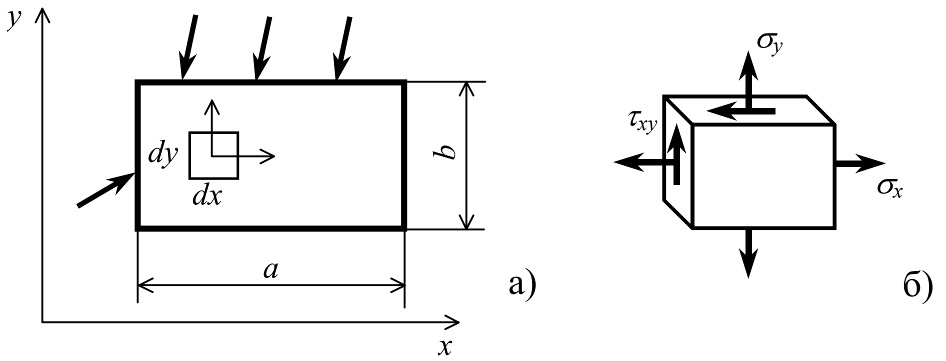


Рисунок 1.7 – Плоский напружений стан

Якщо виділити у пластині елемент з розмірами dx, dy, h, то на його гранях у загальному випадку будуть діяти напруження σ_x, σ_y і τ_{xy} (рисунок 1.7б). Напруження $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{zy}$ будуть нульовими на поверхнях елемента. Припустимо, що ці напруження будуть нульовими і у внутрішніх точках елемента. Такий напружений стан називають плоским. Напруження $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ рівномірно розподілені по товщині пластини h, якщо h – мала величина. Схему плоского напруженого стану приймають і у випадках не малої товщини h, і якщо навантаження нерівномірно розподілене по товщині, однак симетричне відносно серединної площини. При цьому знайдені напруження вважають середніми по товщині (узагальнений плоский напружений стан).

Задача про визначення напруженого стану є двовимірною, оскільки напруження і переміщення u і v залежать від двох координат x і y.

Використовуючи узагальнений закон Гука, з урахуванням введених припущень, одержимо

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right),$$
$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}, \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right). \qquad (1.56)$$

Наявність поперечної деформації $\varepsilon_z \neq 0$ приводить до появи переміщення у напрямку, перпендикулярному поверхні пластини. Однак, у зв'язку з малою товщиною пластини, це переміщення буде малим, і можна стверджувати, що точки пластини переміщуються в основному вздовж осей x і y.

Рівняння рівноваги і граничні умови на поверхні тіла матимуть вигляд

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{P}_{\mathrm{V}} = \mathbf{0},$$
$$\mathbf{A}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}_{\mathrm{S}}, \qquad (1.57)$$

де $\mathbf{A}$ – матричний диференціальний оператор для плоского напруженого стану;

$\mathbf{A_s}$ – матриця направляючих косинусів нормалі до поверхні, де діє навантаження $\mathbf{P_S}$;

$\mathbf{P_V}$ – вектор масових сил;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_S} = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P_V} = \begin{bmatrix} X_V \\ Y_V \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P_S} = \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \end{bmatrix}, \qquad (1.58)$$

$$n_x = \cos(x, n), \quad n_y = \cos(y, n).$$

Геометричні рівняння (рівняння Коші) приймають вигляд

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\,\mathbf{u}, \qquad (1.59)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T, \quad \mathbf{u} = \{u \quad v\}^T.$$

З шести рівнянь сумісності деформацій у даному випадку залишається тільки одне

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0.$$

Закон Гука, записаний відносно напружень, приймає вигляд

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \qquad (1.60)$$

де $\mathbf{C}$ – матриця пружних модулів

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \qquad (1.61)$$

Необхідно відрізняти плоский напружений стан від плоскої деформації. Якщо для пластини, навантаженої у своїй площині, створюються такі умови, що деформація по товщині неможлива (це може бути у двох випадках: у тілі великої довжини, коли кожний умовно виділений шар не може деформуватись по товщині, або при закріпленні тонкого шару (рисунок 1.8 а, б)), має місце плоска деформація.

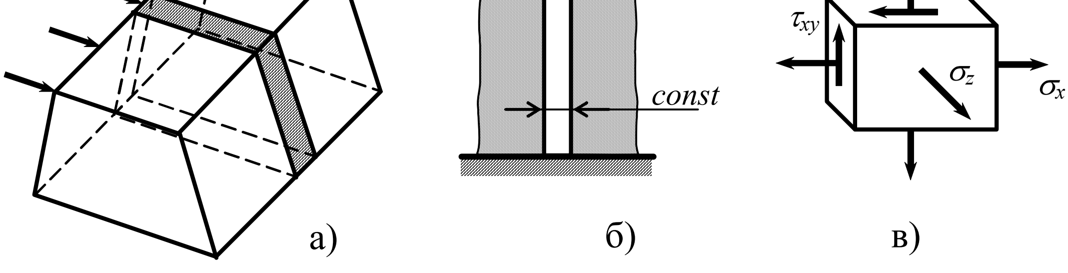


Рисунок 1.8 – Плоска деформація

б в

Згідно із законом Гука, при $\varepsilon_z = 0$, $\sigma_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y)$.

Напружений стан, зображений на рисунку 1.8 в, є об'ємним, але він повністю визначається трьома напруженнями, що залежать від двох координат x і y, тому задача плоскої деформації залишається двовимірною. Для плоскої деформації усі рівняння плоского напруженого стану залишаються незмінними окрім рівнянь закону Гука. У зв”язку з наявністю напруження σ_z для плоскої деформації у матриці С (6.6) необхідно ввести нові умовні константи пружності $\nu_1 = \nu/(1-\nu)$, $E_1 = E/(1-\nu^2)$ і $G = E_1/[2(1+\nu_{1)}]$.

1.2 Основи теорії пластичності

Лінійна теорія пружності побудована на фізичних залежностях Гука, згідно з якими між напруженнями і деформаціями має місце лінійна однозначна залежність. Між тим експериментальні випробування свідчать, що лінійна залежність має місце тільки при дуже малих деформаціях (напруженнях), а для деяких матеріалів (чавун) взагалі є нелінійною навіть при малих деформаціях. Типові діаграми деформування зразків при розтягу наведені на рисунку 13.1а.

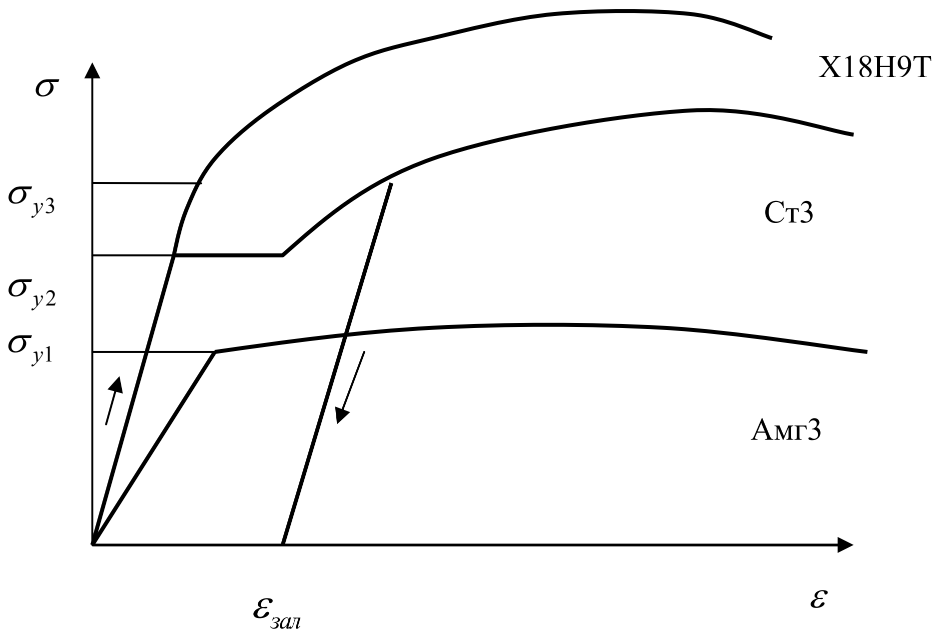
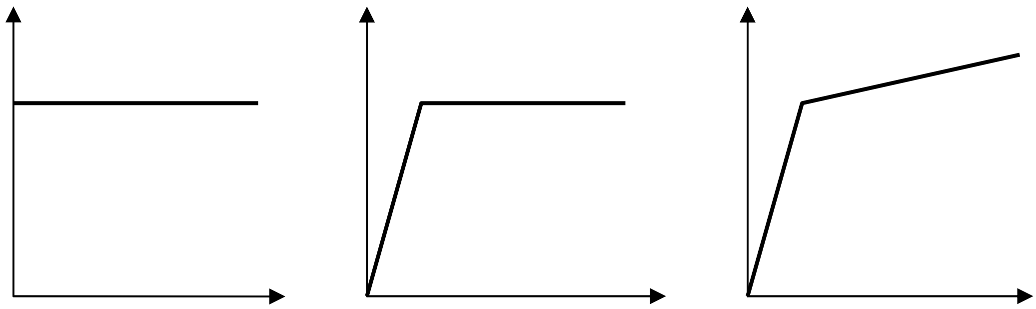


Рисунок 1.9 Діаграми деформування матеріалів

У конкретних випадках ці діаграми апроксимують більш або менш складними залежностями (рисунок 1.9).



а б в

Рисунок 1.10 Умовні діаграми деформування (а – ідеально-пластичний, б – пружно-пластичний, в – пружно-пластичний зі зміцненням матеріали)

У залежності від поведінки матеріалу при розвантаженні розрізняють нелінійно пружні (рисунок 1.11, а) і неідеально-пружні матеріали (рисунок 1.11, б).

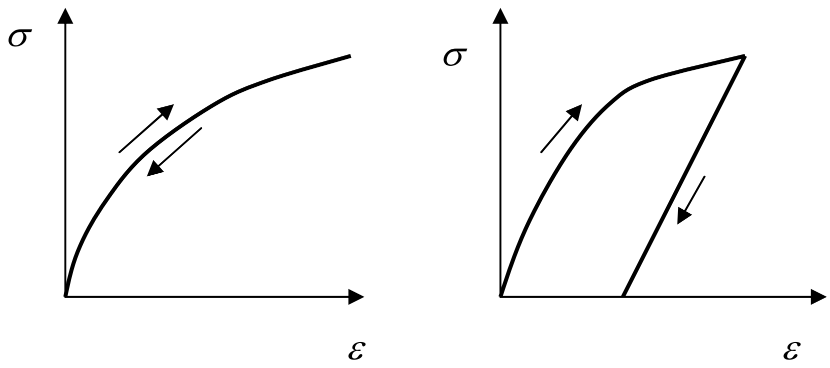


Рисунок 1.11 Нелінійно-пружний і неідеально-пружний матеріали

При циклічних деформаціях неідеально-пружних матеріалів відбувається втрата частини механічної енергії на теплоутворення, магнітні перетворення і т. п. Вивченню матеріалів з пластичним деформуванням присв'ячений розділ МТДТ, який називається теорією пластичності. Між нелінійно пружними і пружно-пластичними матеріалами основна різниця полягає у тому, що залежність між напруженнями і деформаціями для останніх є неоднозначною і залежить від шляху деформування. Між теорією пластичності і теорією пружності спільним є використання ***умов рівноваги, умов сумісності деформацій, кінематичних залежностей між деформаціями і переміщеннями***. ***Відмінності тільки у фізичних залежностях***, – у теорії пластичності використовуються інші фізичні залежності. Зазначимо, що між нелінійною теорією пружності і теорією пластичності проявляється суттєва відмінність, обумовлена неоднозначністю кривої деформування при навантаженні і розвантаженні у пружно-пластичних матеріалів. Якщо для одновісного напруженого стану перехід визначається границею пластичності, то при складному напруженому стані необхідно визначити якийсь критерій переходу у пластичний стан. Численні експериментальні дослідження свідчать, що при ***трьохвісному розтягу або стиску*** матеріал деформується як лінійно пружний. Тоді умови пластичності залежать тільки від другого і третього інваріантів девіатора напружень. Прикладом критеріїв є критерії Губера-Мізеса (критерій формозміни), Треска (найбільших дотичних напружень), Писаренко-Лебедева і багато інших [1]. Поки що немає універсального критерію , що і пояснює їх велику кількість. Припущення про наявність границі між пружним і пластичним станами справедливе для спрощених моделей пружно-пластичного матеріалу. У дійсності такої границі не існує і крива деформування не має зламів, тобто критерію пластичності як такого не існує, або існує деякий умовний. Згідно з гіпотезою Губера-Мізеса характеристикою залежностей між напруженнями і деформаціями можна вибрати інтенсивності напружень і деформацій.

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{((\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}{}^2+\tau_{yz}{}^2+\tau_{zx}{}^2)}$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{((\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+(\varepsilon_y-\varepsilon_z)+(\varepsilon_z-\varepsilon_x)+\frac{3}{2}(\gamma_{xy}{}^2+\gamma_{yz}{}^2+\gamma_{zx}{}^2)}$$

Залежність між ними $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$ вважається єдиною для усіх напружених станів.

При одновісному напруженому стані $\sigma_i = \sigma$ і $\varepsilon_i = \dfrac{2(1+\nu)}{3}\varepsilon$, а для матеріалу, який не стискається (тобто для якого $\nu = 0.5$) – $\varepsilon_i = \varepsilon$. Таким чином, крива $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$ у даному випадку співпадає з діаграмою розтягу матеріалу. Зменшення інтенсивності напружень свідчить про наявність розвантаження. Взагалі, величина деформацій у точках об'єму залежить не тільки від величини напружень, а і від шляху деформування. У зв'язку з цим пластичність повинна описуватись диференціальними (або інтегральними) залежностями. Більш простим варіантом теорії пластичності є теорія малих пружно-пластичних деформацій або ***деформаційна теорія пластичності***. Деформаційна теорія пластичності будується на трьох гіпотезах:

– об'ємна деформація є пружною, тобто для залежності середніх напружень і деформацій справедлиий закон Гука

$$\sigma_c = K\theta = 3K\varepsilon_c;$$

– девіатори напружень і деформацій співпадають з точністю до сталого множника

$$D_\sigma = \psi D_\varepsilon;$$

У скалярній формі ця рівність виглядає так:

$$\begin{aligned} &\sigma_x-\sigma_c=\psi(\varepsilon_x-\varepsilon_c); \quad \tau_{xy}=\psi\gamma_{xy}/2;\\ &\sigma_y-\sigma_c=\psi(\varepsilon_y-\varepsilon_c); \quad \tau_{yz}=\psi\gamma_{yz}/2; \qquad (13.1)\\ &\sigma_z-\sigma_c=\psi(\varepsilon_z-\varepsilon_c); \quad \tau_{zx}=\psi\gamma_{zx}/2; \end{aligned}$$

– параметр ψ визначається через інтенсивності напружень і деформацій:

$$\psi = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}.$$

Залежності деформаційної теорії пластичності виконуються тільки при простих навантаженнях або близьких до простих. Прості навантаження мають місце у тому випадку, коли компоненти тензора напружень змінюються пропорційно одному множнику. Рівняння (13.1) можна записати відносно деформацій у вигляді, характерному для рівнянь закону Гука.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E^*}\left[\sigma_x - \nu^*(\sigma_y + \sigma_z)\right], \gamma_{xy} = \frac{1}{G^*}\tau_{xy},$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E^*}\left[\sigma_y - \nu^*(\sigma_z + \sigma_x)\right], \gamma_{yz} = \frac{1}{G^*}\tau_{yz},$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E^*}\left[\sigma_z - \nu^*(\sigma_x + \sigma_y)\right], \gamma_{zx} = \frac{1}{G^*}\tau_{zx}.$$

де

$$\nu^* = \left[\frac{1}{2} - \frac{1-2\nu}{3E}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right]\left[1 + \frac{1-2\nu}{3E}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right]^{-1}, G^* = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} = \frac{E^*}{2(1+\nu^*)},$$
$$E^* = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left[1 + \frac{1-2\nu}{3E}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right]^{-1}.$$

Крім того,

$$\sigma_c = \frac{E^*}{1-2\nu^*}\varepsilon_c.$$

Таким чином, задачу теорії пластичності можна розглядати як задачу теорії пружності, але для неоднорідного пружного тіла, оскільки умовні параметри пружності E^*, ν^*, G^* залежать у кожній точці тіла від характеристик напружено-деформованого стану. Для розв’язання таких нелінійних задач використовують метод послідовних наближень. У початковому наближенні приймають $E^{*0} = E, G^{*0} = G, \nu^{*0} = \nu$ і з розв’язку пружної задачі знаходять напруження і деформації у нульовому наближенні. Далі із залежності $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$ заходиться σ_i, а потім нові значення параметрів $E^{*1} = E, G^{*1} = G, \nu^{*1} = \nu$. Очевидно, після цього у кожній точці об’єму конструкції матимемо неоднакові фізичні параметри, тобто приходимо до задачі неоднорідної теорії пружності. Після одержання розв’язку, знайдемо напруження і деформації у наступному наближенні і т.д. Процес послідовних наближень продовжується до тих пір, поки значення компонент тензорів напружень або деформацій у двох сусідніх наближеннях будуть відрізнятися не більше ніж встановлена допустима похибка. Для залежностей $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$, які мають місце для більшості матеріалів, цей процес збігається.

Більш універсальною, але і більш складною є теорія пластичності у приростах, так звана теорія течії. Докладний аналіз теорій течії можна знайти у підручниках теорії пластичності [2].

1.3 Елементи теорії в’язкопружності

Для багатьох матеріалів, зокрема пластмас, залежності між напруженнями і деформаціями наявно залежать від часу

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\sigma}.$$

$\boldsymbol{\Phi}(t)$ називають функцією релаксації, а $\boldsymbol{\Psi}(t)$ - функцією повзучості. (У випадку складного напруженого стану це матриці функцій повзучості і релаксації).

Релаксація напружень – це зменшення напружень з часом при сталій деформації. Повзучість – це збільшення деформацій при сталому напруженні.

Математичні залежності для випадку змінних напружень або деформацій для лінійного матеріалу (якщо функція релаксацій і повзучості не залежать від напружень і деформацій) можна знайти, скориставшись принципом суперпозиції. Якщо, наприклад, відома історія зміни вектора деформацій $\boldsymbol{\varepsilon}(t)=\boldsymbol{\varepsilon}_0 f(t)$ від початкового значення до даного моменту, то напруження можна записати як

$$\boldsymbol{\sigma}(t_N)=\sum_{i=0}^{N} d\boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\Phi}(t-t') \Rightarrow \int_0^{t_N} \boldsymbol{\Phi}(t-t') \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt'} dt' .$$

Ця залежність відомий як рівняння Больцмана. Вибираючи функцію $\boldsymbol{\Phi}(t-t')$, можна підібрати відповідну фізичну залежність, яка відображає в’язко-пружні властивості матеріалу.

У задачах динаміки конструкцій використання цього рівняння приводить до складних інтегро-диференційних рівнянь. У зв’язку з цим у статичних задачах теорії в’язкопружності використовуються алгебраїчні або диференційні залежності між напруженнями і деформаціями [3].

Додаток. Класичні теорії міцності [1]

Розділ 7 КРИТЕРІЇ МІЦНОСТІ

§ 48. Завдання теорій міцності

Найважливішим завданням інженерного розрахунку є оцінка міцності елементів машин і споруд за відомим напруженим станом. Найпростіше ця задача розв'язується для простих видів деформації, зокрема для одновісних напружених станів, оскільки в цих випадках граничні (небезпечні) напруження можуть бути визначені безпосередньо експериментально.

Як уже зазначалося, небезпечним вважають напруження, при якому починається руйнування (при крихкому стані матеріалу) або виникають залишкові деформації (у разі пластичного стану матеріалу). Так, випробування зразків матеріалу на одновісне розтягання або стискання дає змогу легко визначити небезпечні напруження:

$$\sigma_н = \sigma_т \quad \text{або} \quad \sigma_н = \sigma_в.$$

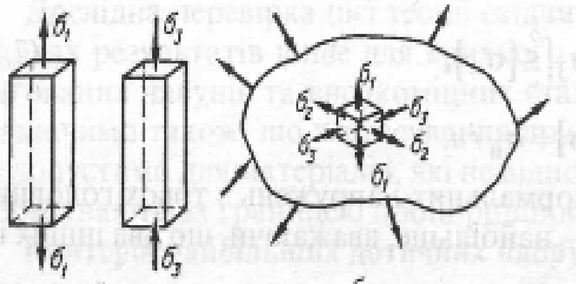
За небезпечним напруженням визначають допустимі напруження $[\sigma_+]$ при розтяганні або $[\sigma_-]$ при стисканні (див. § 34), забезпечуючи відомий коефіцієнт запасу проти настання граничного стану. Отже, умова міцності для одновісного напруженого стану (рис. 175, *а*) набирає вигляду

$$\sigma_1 \le [\sigma_+] \quad \text{або} \quad |\sigma_3| \le [\sigma_-].$$

Розглянемо тепер питання про міцність матеріалу при складних напружених станах, якщо в точках деталей два чи всі три головних напруження $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ не дорівнюють нулю (рис. 175, *б*).

У цих випадках, як свідчать досліди, для одного і того самого матеріалу небезпечний стан може настати при різних граничних значеннях головних напружень $\sigma_{1н}, \sigma_{2н}, \sigma_{3н}$ залежно від співвідношень їх. Тому експериментально визначити граничні значення головних напружень дуже важко не тільки внаслідок складності постановки випробувань зразків матеріалів в умовах складних напружених станів при різних співвідношеннях значень головних напружень, а й у зв'язку з великим обсягом випробувань.

Інший спосіб розв'язання цієї важливої задачі полягає у визначенні на підставі низки теоретичних і практичних досліджень критерію міцності (критерію граничного напружено-деформованого стану). Для цього вводять гіпотезу про переважний вплив на міцність матеріалу того чи іншо-



а *б*

Рис. 175

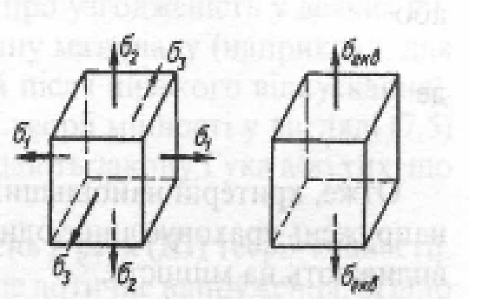


Рис. 176

го фактора: вважають, що порушення міцності матеріалу при будь-якому напруженому стані відбудеться тільки тоді, коли певний фактор досягне певного граничного значення. Граничне значення фактора, що визначає міцність, знаходять з випробувань на просте розтягання або стискання, а іноді — на кручення. Отже, введення критерію міцності дає змогу зіставити певний складний напружений стан із простим, наприклад одновісним, розтяганням (рис. 176) і знайти при цьому таке еквівалентне (розрахункове) напруження, яке в обох випадках дає однаковий коефіцієнт запасу.

Під коефіцієнтом запасу в загальному випадку напруженого стану розуміють число n, що показує, в скільки разів потрібно одночасно збільшити всі компоненти напруженого стану σ_1, σ_2, σ_3, щоб він став граничним:

$$\sigma_{1\text{н}} = n\sigma_1; \quad \sigma_{2\text{н}} = n\sigma_2; \quad \sigma_{3\text{н}} = n\sigma_3.$$

Вибрану таким способом гіпотезу часто називають *механічною теорією міцності*.

Нижче розглянуто деякі з таких теорій.

§ 49. Класичні критерії міцності (теорії міцності)

Критерій найбільших нормальних напружень [перша (I) теорія міцності]. Згідно з цією теорією, переважний вплив на міцність має значення найбільшого нормального напруження. Припускають, що руйнування матеріалу в загальному випадку напруженого стану виникає тоді, коли найбільше нормальне напруження досягає небезпечного значення $\sigma_{\text{н}}$. Останнє визначають при простому розтяганні або стисканні зразків із даного матеріалу.

Умова порушення міцності при складному напруженому стані має вигляд:

$$\sigma_1 = \sigma_{+\text{н}};$$
$$|\sigma_3| = \sigma_{-\text{н}}. \qquad (7.1)$$

Умова міцності з коефіцієнтом запасу n

$$\sigma_1 \le [\sigma_+]$$

або

$$|\sigma_3| \le [\sigma_-], \tag{7.2}$$

де

$$[\sigma] = \sigma_н / n.$$

Отже, критерій найбільших нормальних напружень з трьох головних напружень ураховує лише одне — найбільше, вважаючи, що два інших не впливають на міцність.

Дослідна перевірка свідчить, що ця теорія міцності не відбиває умов виникнення пластичних деформацій і дає при деяких напружених станах задовільні результати лише для дуже крихких матеріалів (наприклад, для каменю, цегли, кераміки, інструментальної сталі).

Критерій найбільших лінійних деформацій [друга (II) теорія міцності]. Згідно з цією теорією, критерієм міцності вважають найбільшу за абсолютним значенням лінійну деформацію. Припускають, що руйнування матеріалу в загальному випадку напруженого стану виникає тоді, коли найбільше лінійне відносне подовження ε_{max} досягає небезпечного значення $\varepsilon_н$. Останнє визначають при простому розтяганні або стисканні зразків із даного матеріалу.

Отже, умова руйнування має вигляд

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_н, \tag{7.3}$$

а умова міцності з коефіцієнтом запасу n —

$$|\varepsilon_{max}| \le [\varepsilon] = \varepsilon_н / n. \tag{7.4}$$

Використовуючи узагальнений закон Гука [формули (6.51)], умову міцності (7.4) виразимо через напруження. Нехай найбільше відносне подовження буде ε_1. Тоді

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right].$$

Якщо при простому розтяганні допустиме напруження дорівнює $[\sigma]$, то для найбільшого відносного подовження таким чином допускаємо величину

$$[\varepsilon] = [\sigma]/E.$$

Підставимо вирази для ε_{max} і $[\varepsilon]$ в умову міцності (7.4). Тоді

$$\frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right] \le \frac{[\sigma]}{E},$$

або

$$\sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right) \le [\sigma]. \tag{7.5}$$

Як випливає з умови міцності (7.5), згідно з цією теорією, з допустимим напруженням слід порівнювати не одне з трьох головних напружень, а комбінацію їх. Еквівалентне напруження в цьому разі

$$\sigma_{екв\,II} = \sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right). \tag{7.6}$$

Дослідна перевірка цієї теорії свідчить про узгодженість у деяких випадках результатів лише для крихкого стану матеріалу (наприклад, для легованих чавунів та високоміцних сталей після низького відпускання). Зазначимо також, що застосування другої теорії міцності у вигляді (7.5) недопустимо для матеріалів, які не відповідають закону Гука або тих, що перебувають за границею пропорційності.

Критерій найбільших дотичних напружень [третя (III) теорія міцності]. Тут критерієм міцності вважають найбільше дотичне напруження. Згідно з цією теорією, припускають, що граничний стан у загальному випадку напруженого стану виникає тоді, коли найбільше дотичне напруження τ_{max} досягає небезпечного значення $\tau_н$. Останнє визначають при досягненні граничного стану у випадку простого розтягання зразків із даного матеріалу.

Умова руйнування має вигляд

$$\tau_{max} = \tau_н, \tag{7.7}$$

умова міцності —

$$\tau_{max} \le [\tau] = \tau_н / n. \tag{7.8}$$

Оскільки, згідно з виразом (6.46),

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \quad а \quad \tau_н = \frac{1}{2}\sigma_н,$$

то умови руйнування і міцності (7.7), (7.8) можна виразити через головні напруження так:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_н; \tag{7.9}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma]. \tag{7.10}$$

Отже, еквівалентним напруженням за третьою теорією є різниця алгебраїчно найбільшого і найменшого головних напружень:

$$\sigma_{екв\,III} = \sigma_1 - \sigma_3. \tag{7.11}$$

Третя теорія міцності взагалі добре підтверджується дослідами для пластичних матеріалів, у яких допустимі напруження на розтяг і стиск однакові. Недоліком цієї теорії є те, що вона не враховує проміжного головного напруження σ_2, яке, згідно з дослідами, справляє також деякий, хоч здебільшого і незначний, вплив на міцність матеріалу.

Зазначимо, що критерій найбільших дотичних напружень зазвичай розглядають як умову початку утворення пластичних (залишкових) деформацій. Останні є наслідком ковзання шарів атомів у кристалі по певних кристалографічних площинах. Це стає можливим тоді, коли на зазначених площинах ковзання дотичні напруження досягають деякого граничного значення.

Отже, як критерій, що визначає виникнення текучості матеріалу, можна взяти найбільше дотичне напруження.

Вважаючи граничним станом настання текучості, з виразу (7.9) маємо

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_т. \tag{7.12}$$

Ця умова достатньо задовільно описує початок появи пластичної деформації при складному напруженому стані для багатьох металів і сплавів.

Критерій питомої потенціальної енергії деформації формозміни [четверта (IV) теорія міцності]. Як критерій міцності у цьому разі вибирають кількість питомої потенціальної енергії формозміни, накопиченої деформованим елементом. Згідно з цією теорією, небезпечний стан (текучість) у загальному випадку напруженого стану виникає тоді, коли питома потенціальна енергія формозміни досягає свого граничного значення. Останнє можна легко визначити при простому розтяганні в момент настання текучості.

Умова настання текучості —

$$u_ф = u_{ф.т}. \tag{7.13}$$

Умова міцності —

$$u_ф \leq \left[u_ф\right]. \tag{7.14}$$

Припускаючи, що закон Гука справедливий аж до настання граничного стану, можна питому потенціальну енергію формозміни в загальному випадку напруженого стану записати, згідно з виразом (6.63), у вигляді

$$u_ф = \frac{1+\mu}{3E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right]. \tag{7.15}$$

При простому розтяганні в момент текучості $\left(\sigma_1 = \sigma_т;\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0\right)$ маємо

$$u_{ф.т} = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_т^2. \tag{7.16}$$

Отже, умова (7.13) після підставляння виразів (7.15) і (7.16) перетворюється на таку:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)} = \sigma_т, \tag{7.17}$$

або

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right]} = \tau_т. \tag{7.18}$$

Умова міцності має вигляд

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right]} \leq \frac{\sigma_т}{n} = [\sigma]. \tag{7.19}$$

Отже, еквівалентне напруження за четвертою теорією

$$\sigma_{\text{екв IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right]}. \qquad (7.20)$$

Зауважимо, що $\sigma_{\text{екв IV}}$ збігається з виразом (6.48) для інтенсивності напружень σ_i.

Досліди добре підтверджують четверту теорію для пластичних матеріалів, що однаково працюють на розтягання і стискання. Поява в матеріалі малих пластичних деформацій четвертою теорією визначається більш точно, ніж третьою.

Слід зазначити, що вираз (7.20) з точністю до постійного множника збігається з виразом для дотичного напруження $\tau_{\text{окт}}$ на октаедричній площадці, рівнонахиленій до всіх трьох головних напружень (див. § 45). Тому розрахункові рівняння четвертої теорії міцності можна дістати, виходячи з критерію сталості октаедричних дотичних напружень:

$$\tau_{\text{окт}} \le \left[\tau_{\text{окт}}\right],$$

тобто пластична деформація незалежно від виду напруженого стану виникає при певному значенні октаедричного дотичного напруження.

Таке трактування звільняє розглядувану теорію міцності від обмежень, пов'язаних із межами дії закону Гука, і дає змогу встановити умови початку не тільки пластичних деформацій, а й руйнування.

Критерій Мора ґрунтується на припущенні, що міцність матеріалів у загальному випадку напруженого стану залежить в основному від значення і знака найбільшого σ_1 та найменшого σ_3 головних напружень. Середнє за модулем головне напруження, як зазначалося вище, лише неістотно впливає на міцність. Досліди з мідними, нікелевими і чавунними трубками засвідчили, що похибка, яка пов'язана з тим, що не враховується σ_2, не вища за 12...15 %. Виходячи з цього припущення, можна будь-який напружений стан зобразити одним кругом Мора, побудованим на напруженнях σ_1 і σ_3.

Якщо при даних σ_1 і σ_3 міцність матеріалу порушується, то круг, побудований на цих навантаженнях, називають *граничним*. Змінюючи співвідношення між головними напруженнями, дістанемо для даного матеріалу сім'ю граничних кругів (рис. 177). Досліди свідчать, що в міру переходу із зони розтягання в зону стискання опір руйнуванню збільшується. Цьому відповідає збільшення діаметрів граничних кругів у міру руху ліворуч.

Обвідна *ABCDE* сім'ї граничних кругів обмежує зону міцності (рис. 177). Точка *C* відповідає всебічному рівномірному розтяганню. Оскільки і при рівномірному всебічному стисканні матеріал здатний, не руйнуючись, витримати дуже великі напруження, то обвідна ліворуч залишається незамкненою.

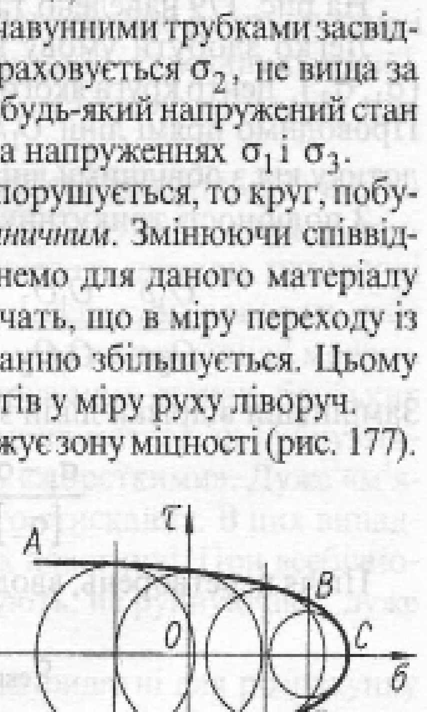


Рис. 177

Якщо гранична обвідна відома, то обчислити міцність досить просто. За визначеними в небезпечній точці деталі значеннями головних напружень σ_1 і σ_3 будують круг.

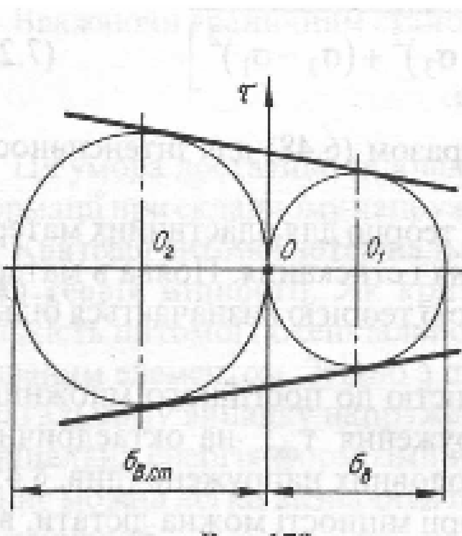


Рис. 178

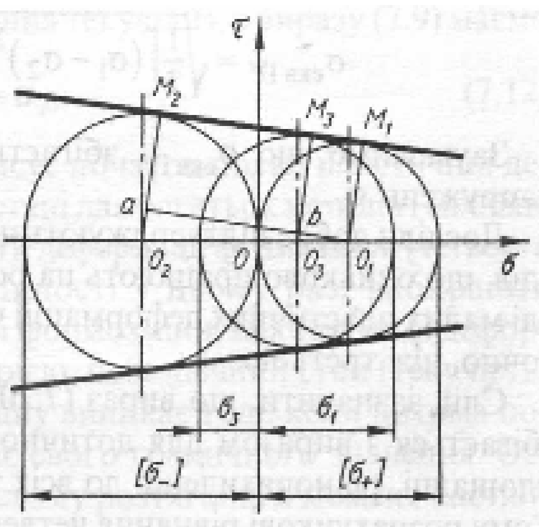


Рис. 179

Міцність буде забезпечена, якщо він цілком ляже всередині обвідної. Збільшуватимемо пропорційно значення головних напружень доти, доки круг, що зображує даний напружений стан, не торкнеться граничних обвідних. Відношення радіусів побудованого таким чином граничного круга і початкового визначить коефіцієнт запасу.

На практиці невелику ділянку обвідної будують на підставі двох дослідів — на розтягання і стискання відповідно до граничних напружень $\sigma_в$ і $\sigma_{в.ст}$, причому граничні криві заміняють прямими лініями, дотичними до кіл (рис. 178). Зменшуючи масштаб креслення в *n* разів (*n* — коефіцієнт запасу), дістанемо зону допустимого напруженого стану.

На рис. 179 наведено таку зону для невеликої ділянки обвідної.

Легко здобути умову міцності для проміжного напруженого стану (σ_1, σ_3), центр круга якого O_3 розміщений між точками O_1 і O_2 (рис. 179). Проводимо прямі лінії O_1M_1, O_2M_2 і O_3M_3, сполучаючи центри і точки дотику кіл з обвідними лініями, а також пряму O_1a, паралельну M_1M_2.

З подібності трикутників дістанемо такі залежності:

$$\frac{\overline{O_3b}}{\overline{O_2a}} = \frac{\overline{O_1O_3}}{\overline{O_1O_2}} \text{ або } \frac{\overline{O_3M_3} - \overline{O_1M_1}}{\overline{O_2M_2} - \overline{O_1M_1}} = \frac{\overline{OO_1} - \overline{OO_3}}{\overline{OO_1} + \overline{OO_2}}.$$

Замінивши відрізки ліній значеннями відповідних напружень, матимемо

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3 - [\sigma_+]}{[\sigma_-] - [\sigma_+]} = \frac{[\sigma_+] - (\sigma_1 + \sigma_3)}{[\sigma_+] + [\sigma_-]}.$$

Після перетворень, вводячи знак нерівності, дістанемо умову міцності:

$$\sigma_{екв\,M} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}\sigma_3 \le [\sigma_+]. \qquad (7.21)$$

При $[\sigma_+] = [\sigma_-]$ обвідна на цій ділянці проходить паралельно осі абсцис, і формула (7.21) збігається з формулою (7.10), яку складено за третьою теорією міцності.

Ґрунтуючись цілком на дослідних даних, теорія Мора взагалі не потребує додаткової експериментальної перевірки. Однак побудувати граничні обвідні для кожного матеріалу можна внаслідок низки складних дослідів із плоскими і об'ємними напруженими станами, що й обмежує її застосування. Крім того, ця теорія, як і третя, не враховує вплив на міцність проміжного напруження σ_2.

Щодо застосовності тієї чи іншої теорії міцності для практичних розрахунків можна зазначити таке.

Руйнування матеріалів відбувається шляхом відриву за рахунок розтягальних напружень або подовжень і шляхом зрізу під дією найбільших дотичних напружень. При цьому руйнування відривом може відбуватися з дуже малими залишковими деформаціями або зовсім без них (крихке руйнування). Руйнування шляхом зрізу відбувається лише після деякої залишкової деформації (в'язке руйнування). Отже, зрозуміло, що першу і другу теорії міцності, які відображають руйнування відривом, можна застосувати лише для матеріалів, що перебувають у крихкому стані. Третю і четверту теорії міцності, які добре відображають настання текучості та руйнування шляхом зрізу, слід застосовувати для матеріалів, що перебувають у пластичному стані.

Теорія міцності Мора дає змогу визначити опір руйнуванню матеріалів, які мають різний опір розтяганню та стисканню. При цьому вітка AB (див. рис. 177) характеризує руйнування від зрізу, а вітка BC — від відриву.

Оскільки перша і друга теорії міцності мають істотні недоліки, то останнім часом панує думка про недоцільність застосування їх. Отже, для практичних розрахунків слід рекомендувати четверту (або третю) теорію міцності для матеріалів з однаковим опором розтяганню та стисканню і теорію Мора — для матеріалів, опір яких розтяганню і стисканню різний, тобто для крихких матеріалів (для них поки що застосовують і другу теорію міцності).

Слід зазначити, що стан матеріалу (крихкий або пластичний) визначається не тільки його властивостями, а й видом напруженого стану, температурою і швидкістю навантажування. Як свідчать досліди, пластичні матеріали за певних умов навантажування і температури поводять себе як крихкі, тоді як крихкі матеріали в певних напружених станах можуть виявляти пластичні властивості. Так, при напружених станах, близьких до всебічного рівномірного розтягання, пластичні матеріали руйнуються, як крихкі. Такі напружені стани називають «жорсткими». Дуже «м'якими» є напружені стани, близькі до всебічного стискання. В цих випадках крихкі матеріали можуть поводити себе, як пластичні. При всебічному рівномірному стисканні матеріали витримують, не руйнуючись, дуже великий тиск.

Зазначимо, що розглянуті теорії міцності непридатні для розрахунку міцності у разі всебічного стискання $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p)$. Вплив виду напруженого стану можна наближено врахувати за допомогою діаграм механічного стану, які розглядаються нижче.

§ 50. Поняття про нові теорії міцності

Умови переходу матеріалу в граничний стан, а також умови міцності за різними теоріями були виражені через головні напруження $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, які є інваріантами напруженого стану.

Для тривимірного простору, напрямлюючи осі координат по головних напрямах, зазначені умови можна подати у вигляді деяких граничних поверхонь

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0. \tag{7.22}$$

Так, гранична поверхня, що відповідає умові появи пластичних деформацій за теорією питомої потенціальної енергії формозміни [див. формулу (7.18)], має вигляд

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_т^2 = 0. \tag{7.23}$$

Гранична поверхня (7.23) є круговим циліндром, вісь якого рівнонахилена до координатних осей (рис. 180, *а*), радіусом $r = \sqrt{(2/3)}\,\sigma_т$. Для плоского напруженого стану, коли одне з головних напружень дорівнює нулю, умова (7.23) дає еліптичну граничну криву (рис. 180, *б*).

Критерію найбільших дотичних напружень відповідає гранична поверхня у вигляді правильної шестигранної призми, вписаної в циліндр (7.23). Критерію найбільших нормальних напружень відповідає куб із ребром, що дорівнює $\sigma_н$.

Зазначимо, що всі точки, які лежать усередині зони, обмеженої граничною поверхнею, відповідають напруженим станам з коефіцієнтом запасу більшим за одиницю. Напружені стани, які зображені точками поза цієї зони, мають коефіцієнт запасу менший за одиницю.

Недоліки розглянутих теорій, а також поява нових матеріалів були стимулами для розробки нових теорій міцності. Більшість з них ґрунтуються на виборі такої форми граничної поверхні, яка дає змогу найповніше врахувати особливості опору даного класу матеріалів в умовах складного напруженого стану.

Розглянемо деякі нові теорії.

Теорія Ягна. Ю. І. Ягн запропонував граничну поверхню (7.22) взяти у вигляді полінома другого степеня, симетричного відносно всіх трьох головних напружень:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + a(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + \\ + b(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = c, \tag{7.24}$$

де сталі a, b і c для даного ізотропного матеріалу визначаються з дослідів на одновісне розтягання і стискання та чистий зсув.

Визначивши допустимі напруження $[\sigma_+], [\sigma_-]$ і $[\tau]$ відповідно для розтягання, стискання і зсуву, знаходимо вирази для сталих:

$$a=\frac{6[\tau]^2-2[\sigma_+][\sigma_-]}{[\sigma_+][\sigma_-]};$$

$$b=\frac{6[\tau]^2([\sigma_-]-[\sigma_+])}{[\sigma_+][\sigma_-]};\quad c=6[\tau]^2.$$

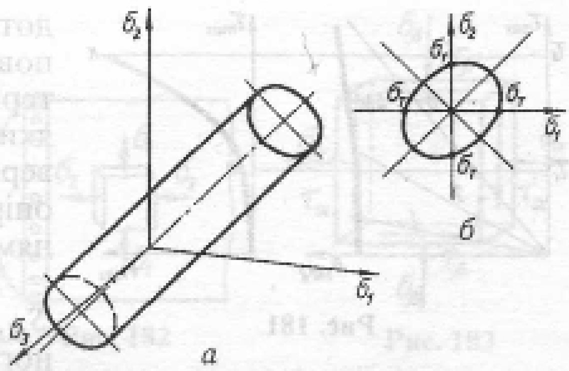


Рис. 180

Отже, теорія Ю. І. Ягна дає змогу врахувати неоднаковий опір матеріалу розтяганню і стисканню, а також опір матеріалу зсуву. При певних співвідношеннях між введеними сталими a, b і c з виразу (7.24) можна здобути низку енергетичних критеріїв міцності, у тому числі і критерій питомої потенціальної енергії формозміни.

Теорія Писаренка і Лебедєва. Виходячи з того, що настання граничного стану обумовлене здатністю матеріалу чинити опір як дотичним, так і нормальним напруженням, автори запропонували шукати критерії міцності у вигляді інваріантних до напружених станів функцій дотичних напружень і максимального нормального напруження. Наприклад, один із таких запропонованих критеріїв має вигляд

$$\tau_{окт}+m_1\sigma_1\le m_2. \tag{7.25}$$

Вираз для $\tau_{окт}$ дається формулою (6.47). Сталі m_1 і m_2 матеріалу можна виразити через граничні напруження $\sigma_{+н}, \sigma_{-н}$ при одновісному розтяганні та стисканні. Тоді умова (7.25) набирає вигляду

$$\frac{3}{\sqrt{2}}\chi\tau_{окт}+(1-\chi)\sigma_1\le\sigma_{+н}, \tag{7.26}$$

де

$$\chi=\frac{\sigma_{+н}}{\sigma_{-н}}.$$

Для матеріалів, що перебувають у пластичному стані, $\sigma_н=\sigma_{-н}$, $\chi=1$ і формула (7.26) перетворюється на умову граничного стану за четвертою теорією міцності. Для ідеально крихкого матеріалу $\chi=0$, і вираз (7.26) перетворюється на умову руйнування за першою теорією міцності. При $0\le\chi\le1$ (переважна більшість реальних матеріалів) гранична поверхня (7.26) є рівнонахиленою до головних осей фігурою, в яку вписано шестигранну піраміду, що відповідає спрощеній теорії міцності Мора [умова (7.21)].

Дослідна перевірка розглянутої теорії показала, що критерій (7.26) добре узгоджується з результатами випробувань широкого класу конструкційних матеріалів.

Діаграми механічного стану (критерій Я. Б. Фрідмана). Вплив типу напруженого стану на характер порушення міцності матеріалів можна наближено врахувати за допомогою діаграм механічного стану. Останні будують на підставі таких положень:

1. Залежно від типу напруженого стану матеріали можуть руйнуватися від розтягальних напружень або подовжень шляхом відриву або від

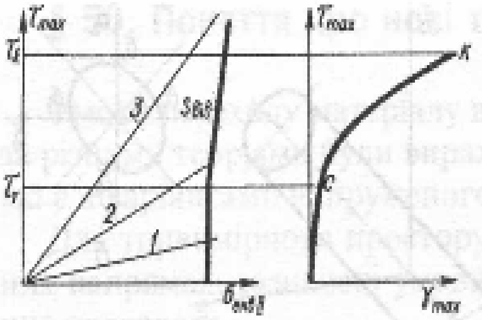


Рис. 181

дотичних напружень шляхом зрізу. Відповідно до цього розрізняють дві характеристики міцності — опір відриву $S_{\text{від}}$, який є нормальним напруженням на поверхні руйнування в першому випадку, і опір зрізу τ_K, що є дотичним напруженням у другому випадку.

2. Обидві характеристики міцності $S_{\text{від}}$ і τ_K не залежать від типу напруженого стану.

3. Крива деформування матеріалу в координатах $\tau_{\max} \sim \gamma_{\max}$ також не залежить від напруженого стану.

4. Порушення міцності шляхом відриву описується теорією найбільших відносних подовжень:

$$\sigma_{\text{екв II}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = S_{\text{від}}, \tag{7.27}$$

а порушення міцності шляхом зрізу — теорією найбільших дотичних напружень:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_K. \tag{7.28}$$

Діаграма механічного стану складається з двох діаграм (рис. 181) — власне діаграми механічного стану (ліворуч) і кривої деформування в координатах $\tau_{\max} \sim \gamma_{\max}$. При побудові діаграми по осі ординат відкладають найбільше дотичне напруження $\tau_{\max}$, а по осі абсцис — найбільше еквівалентне розтягальне напруження за другою теорією міцності $\sigma_{\text{екв II}}$. На діаграму наносять граничні лінії, що відповідають границі текучості $\tau_{\text{т}}$ при зсуві, опору зрізу τ_K і опору відриву $S_{\text{від}}$. Відхилення лінії опору відриву праворуч вище за границю текучості (рис. 181) відповідає зростанню опору відриву з появою залишкових деформацій.

Для характеристики типу напруженого стану вводять коефіцієнт «м'якості», який становить відношення найбільшого дотичного напруження в точці до найбільшого еквівалентного розтягального напруження:

$$\alpha = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\text{екв II}}}. \tag{7.29}$$

Отже, різні напружені стани зі збільшенням навантаження зображуються на діаграмі променями, тангенси кутів яких дорівнюють відповідному значенню α. Наприклад, при всебічному розтяганні $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3)$ $\tau_{\max} = 0$, $\alpha = 0$ і промінь збігається з віссю абсцис; при простому розтяганні $(\sigma_1 = \sigma;\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0)$

$$\tau_{\max} = \sigma/2; \quad \sigma_{\text{екв II}} = \sigma \ \text{ і } \ \alpha = 1/2;$$

при простому стисканні $(\sigma_1 = \sigma_2 = 0;\ \sigma_3 = -\sigma)$

$$\tau_{\max} = \sigma/2; \ \sigma_{\text{екв II}} = \mu\sigma; \ \alpha = 1/(2\mu).$$

Вибравши $\mu = 0{,}25$, знаходимо, що $\alpha = 2$.

Розглядаючи промені, що відповідають різним типам напруженого стану матеріалу, можна наближено визначити вид руйнування і вибрати придатну теорію міцності. Наприклад, промінь *1* на діаграмі перетинає передусім лінію опору відриву. Отже, матеріал зруйнується шляхом відриву без попередньої пластичної деформації. Промінь *2* перетинає спочатку лінію текучості, а потім лінію опору відриву. Отже, при такому напруженому стані руйнування відбудеться шляхом відриву, але з попередньою пластичною деформацією. Для напруженого стану, що відповідає променю *3*, після пластичної деформації руйнування відбудеться шляхом зрізу.

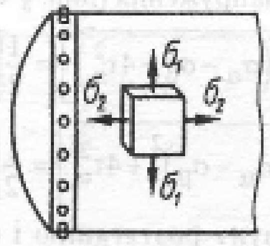


Рис. 182

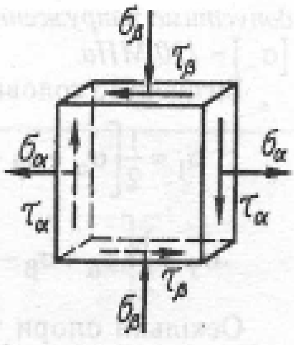


Рис. 183

Тоді, коли промені, що зображують той чи інший складний напружений стан, перетинають передусім лінію опору відриву, розрахунок міцності слід виконувати за теорією Мора, другою або першою теоріями міцності. Якщо спочатку промені перетинають лінію границі текучості, то розрахунок міцності треба робити за четвертою або третьою теорією міцності.

Отже, діаграми механічного стану з певним наближенням відображають залежність форми руйнування від типу напруженого стану. Наближеність побудови полягає в тому, що границя текучості й опір руйнуванню непостійні. Промені, які зображають напружений стан, є прямими лише до досягнення границі текучості.

Приклад 19. *На гранях елемента (рис. 182), вирізаного із циліндричної стінки резервуара, діють напруження $\sigma_1 = 150$ МПа, $\sigma_2 = 75$ МПа, $\sigma_3 = 0$. Резервуар виготовлено з маловуглецевої сталі марки Ст3. Допустиме напруження на розтяг $[\sigma_+] = 160$ МПа. Перевіримо міцність стінки.*

Оскільки матеріал перебуває в пластичному стані, то обчислювати слід за IV або III теорією міцності.

Умова міцності за IV теорією при $\sigma_3 = 0$ має вигляд

$$\sigma_{\text{екв IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \le [\sigma]. \tag{7.30}$$

Підставляючи у вираз (7.30) значення σ_1 і σ_3, знаходимо

$$\sigma_{\text{екв IV}} = \sqrt{150^2 + 75^2 - 150 \cdot 75} \text{ МПа} = 129{,}9 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}.$$

Виходячи з III теорії міцності, маємо

$$\sigma_{\text{екв III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma],$$

або

$$\sigma_{\text{екв III}} = 150 - 0 < 160.$$

Отже, міцність стінки забезпечено.

Приклад 20. *У небезпечній точці чавунної деталі на гранях виділеного елемента (рис. 183) напруження $\sigma_\alpha = 5$ МПа; $\sigma_\beta = -25$ МПа; $\tau_\alpha = -\tau_\beta = 26$ МПа. Перевіримо міцність, якщо* *допустиме напруження на розтяг* $[\sigma_+] = 35$ *МПа, а допустиме напруження на стиск* $[\sigma_-] = 120$ *МПа.*

Визначимо головні напруження (див. § 44):

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{\left(\sigma_\alpha - \sigma_\beta^2 + 4\tau_\alpha^2\right)}\right] = \frac{1}{2}\left[-20 + \sqrt{30^2 + 4\cdot 26^2}\right]\text{ МПа} = 20\text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}\left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta - \sqrt{\left(\sigma_\alpha - \sigma_\beta\right)^2 + 4\tau_\alpha^2}\right] = \frac{1}{2}\left[-20 - \sqrt{30^2 + 4\cdot 26^2}\right]\text{ МПа} = -40\text{ МПа}.$$

Оскільки опори чавуну розтяганню і стисканню відрізняються, то перевірку міцності виконаємо за теорією Мора. Цей напружений стан зображується на граничній діаграмі (див. рис. 179) між простим розтяганням і простим стисканням. Отже, для розрахунку міцності можна використати формулу (7.21)

$$\sigma_{\text{екв}\,M} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}\sigma_3 \le [\sigma_+].$$

Маємо

$$\sigma_{\text{екв}\,M} = 20 + \frac{35}{120}40 = 31{,}7\text{ МПа} < 35\text{ МПа}.$$

Розрахунок за теорією найбільших відносних подовжень, враховуючи, що $\sigma_2 = 0$, дає:

$$\sigma_{\text{екв II}} = \sigma_1 - \mu\sigma_3 \le [\sigma].$$

Для $\mu = 0{,}25$

$$\sigma_{\text{екв II}} = 20 + 0{,}25\cdot 40 = 30\text{ МПа} < 35\text{ МПа}.$$

Приклад 21. *На гранях елемента (рис. 184), виділеного в небезпечній точці стрижня, який зазнав згинання, напруження*

$$\sigma_\alpha = \sigma;\quad \sigma_\beta = 0;\quad \tau_\alpha = \tau;\quad \tau_\beta = -\tau.$$

Визначимо еквівалентні (розрахункові) напруження за чотирма теоріями міцності.

Обчислюємо головні напруження в небезпечній точці за формулами (6.21):

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right);\quad \sigma_3 = \frac{1}{2}\left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right).$$

Тоді еквівалентні напруження й умови міцності набирають такого вигляду:

а) за I теорією

$$\sigma_{\text{екв I}} = \sigma_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right) \le [\sigma]; \tag{7.31}$$

б) за II теорією

$$\sigma_{\text{екв II}} = \sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right) = \frac{1-\mu}{2}\sigma + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma], \tag{7.32}$$

або, взявши $\mu = 0{,}3$, знаходимо

$$\sigma_{\text{екв II}} = 0{,}35\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma]; \tag{7.33}$$

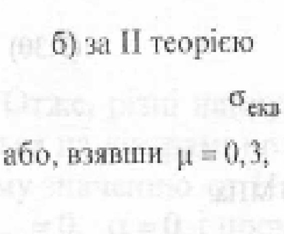


Рис. 184

в) за III теорією

$$\sigma_{\text{екв III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma]; \tag{7.34}$$

г) за IV теорією

$$\sigma_{\text{екв IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right]} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma]. \tag{7.35}$$

Лекція 4а Металографічний аналіз зростання тріщини і руйнування

Одним з недоліків механіки руйнування є відсутність надійного критерію руйнування. Прикладна механіка може достатньо вірно описати напруження і деформації в біля виїмки або вершини тріщини. Умови, при яких ці напруження і деформації приведуть до розповсюдження тріщини, повністю ще не з'ясовані. Передбачається, що розповсюдження тріщини має місце, коли напруження при вершині тріщини перевищують критичну величину. Було зроблено декілька спроб використовувати як критерій руйнування або деформації, або середні напруження, або деформації на деякій відстані перед тріщиною. Останніми роками часто став використовуватися критерій критичного розкриття. Але всі ці критерії не мають серйозного фізичного обгрунтовування, хоча і можуть бути корисними у деяких випадках.

Критерій руйнування повинен бути заснований на фізичних моделях, які можна побудувати, лише знаючи механізми руйнування. Чи буде рости тріщина, залежить від стану матеріалу перед вершиною тріщини, який при діючих напруженнях і деформаціях повинен бути на межі руйнування. Дослідження механізмів руйнування необхідне для розуміння процесів руйнування. Це дослідження є суттєвою частиною механіки руйнування, і пов'язане з вивченням процесів руйнування на рівні атомів і дислокацій аж до кристалічних зерен і домішок.

Для отримання більш міцних матеріалів довгий час проводилися дослідження по вивченню явищ текучості і повзучості, оскільки підвищення границі текучості звичайно приводило до отримання більш міцного матеріалу. В результаті цієї роботи в даній області (матеріалознавстві) накопичені глибокі знання і зроблено неабияку безліч відкриттів. Вивченням самих процесів руйнування протягом довгого часу нехтувалось. Поява механіки руйнування стимулювала дослідження руйнувань. Були отримані придатні в якісному відношенні знання про процеси руйнування, але кількісно картина все ще далека від завершення, не дивлячись на деякі багатообіцяючі досягнення. У даній лекції приведено деякі елементарні відомості про різні механізми руйнування, які необхідні при вивченні механіки руйнування і для розуміння основних ідей. У підрозділах 2.2 і 2.3 розглянуто два основні механізми руйнування — руйнування сколом і в'язке руйнування. Два наступні параграфи присвячено механізмам утворення тріщин, а саме: втомному і корозійному розтріскуванню під напруженням, а також утворенню тріщин у присутності водню. Саме по собі утворення тріщин рідко приводить до руйнування. Коли тріщина через утомленість матеріалу або через корозію збільшується до певного розміру, остаточне руйнування буде або в'язким, або крихким. Оскільки руйнування сколом звичайно пов'язано з малими пластичними деформаціями, його називають крихким руйнуванням. Але термін «крихке руйнування» часто узагальнюють і застосовують до всіх руйнувань з малими пластичними деформаціями, не дивлячись на те, що в своїй завершальній стадії руйнування є в'язким. Така термінологія може легко привести до плутанини. Тому тут руйнування позначатимемо на основі механізму остаточного відділення, тобто або в'язким руйнуванням, або руйнуванням сколом.

Дослідження механізмів руйнування в значній мірі спираються на електронну мікроскопію. Наука, пов'язана з описом і поясненням процесів руйнування за допомогою електронних мікроскопів, називається електронною фрактографією. Не можна сказати, щоб ця методика була широко відома, тому доречно дати її короткий опис.

Електрони можуть бути пропущені через шар матеріалу товщиною лише в декілька сотень або тисяч ангстрем. Тому за допомогою електронної мікроскопії в проходячому пучку досліджувати зруйновану поверхню не можна, а її форму слід перенести на тонку, прозору для електронів репліку. Технологія копіювання (рис. 2.1), яка найбільш широко використовується, включає як проміжний етап виготовлення репліки з пластмаси. Пластмасу в рідкій формі поміщають на зруйновану поверхню (рис. 2.1, а).

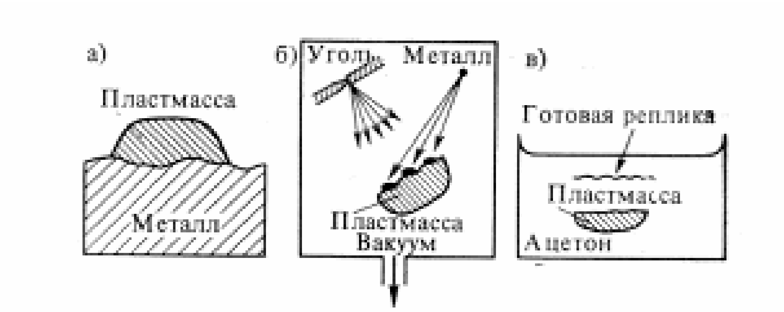


Рис. 2.1. Двоетапне виготовлення реплік для електронної фрактографії

Поверхня повинна бути повністю звільнена від вологи, щоб пластмаса могла заповнити найменші виїмки. Після затвердіння пластмасу відділяють від поверхні руйнування, поміщають у вакуумну камеру і випаровуванням двох вугільних електродів наносять тонкий шар вугілля (рис. 2.1, б). Випаровування деяких важких металів, таких, як платина, відтіняє картину і збільшує контраст. Після цього пластмасу розчиняють в ацетоні (рис. 2.1, в), а звільнена вугільна репліка наноситься на мідну сітку, яка підтримує тонку вугільну плівку в мікроскопі.

Через наявність безлічі дрібних нерівностей вугільна репліка має певну міцність і жорсткість. Зрозуміти це допомагає рис. 2.2, на якому одна і та ж поверхня руйнування розглядається під різними кутами, що досягається поворотом зразка в електронному мікроскопі. Ця технологія дозволяє за допомогою стереографічних вимірювань визначити топографію поверхні руйнування.

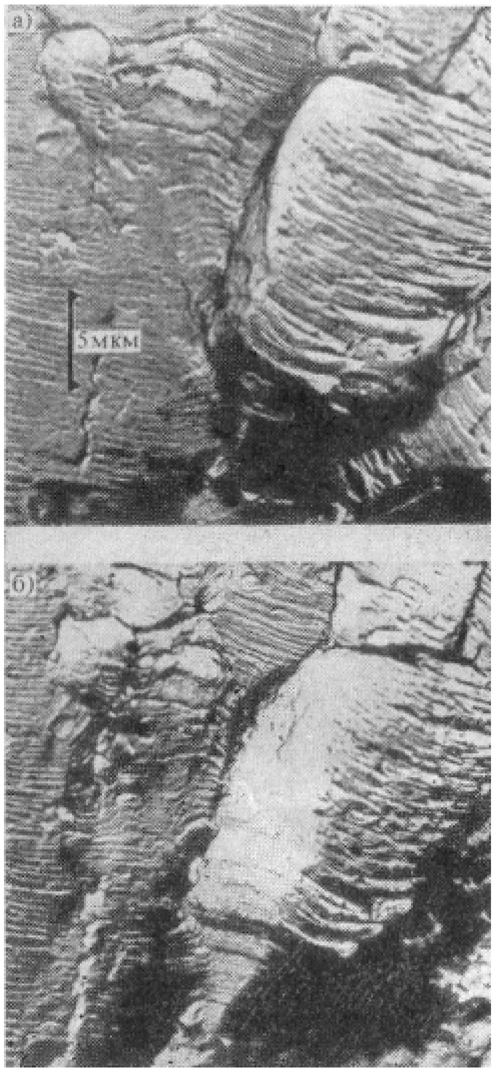


Рис. 2.2. Дві фрактограми поверхні втомної тріщини в алюмінієвому сплаві
а) — кут повороту зразка дорівнює нулю;
б) — кут повороту зразка дорівнює 33°

Щоб додати репліці велику міцність, її підтримують опорною мідною сіткою. При малому збільшенні мікроскопа стають видно елементи цієї сітки (рис. 2.3).

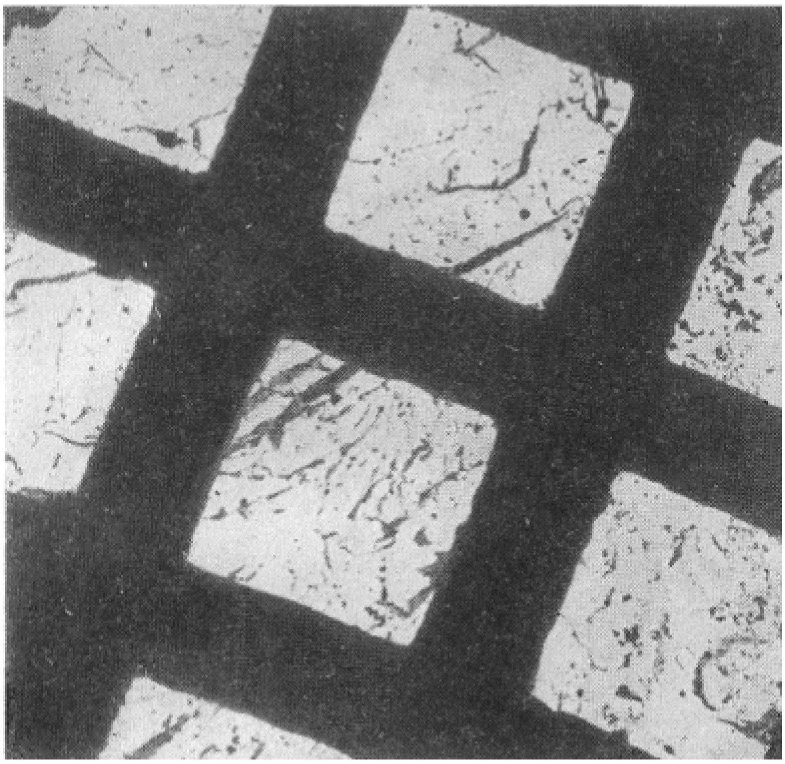


Рис. 2.3. Руйнування сколом сталі. Розмір внутрішньої частини осередку сітки складає 80 мкм

Вивчення механізмів руйнування вимагає також дослідження засобами електронної мікроскопії структури металів. В цьому випадку метал повинен бути зроблений прозорим для електронного пучка. Це досягається виготовленням з металу засобами технології електрополіровки надзвичайно тонкої фольги (завтовшки 500–1500 $\dot{A}$). При проходженні електронного пучка через метал в місцях великої густини енергія пучка зменшується, тому маленькі частинки усередині фольги зображатимуться як темні області. В місцях, де регулярні кристалічні грати порушені, тобто на межах дислокацій і зерен, електронний пучок відхиляється. Отже, на зображенні дислокація буде представлена темною лінією (рис. 2.4).

З появою електронного мікроскопа з скануючим променем з'явилася можливість спостерігати поверхню руйнування безпосередньо, без реплік. Електронний промінь високої інтенсивності сканує по поверхні руйнування. Збудження цими первинними електронами приводить до випуску з поверхні руйнування інших електронів (повторних). Ці повторні електрони дають зображення поверхні розриву, яке робиться видимим за допомогою катодно-променевої електронної трубки, сканування в якій проводиться так само, як і сканування електронного променя. На рис. 2.5 показане зображення однієї і тієї ж ділянки поверхні руйнування, отримані за допомогою скануючого електронного мікроскопа (а) і мікроскопа в проходячому пучку (б) з використанням вугільної репліки.

Звичайно, кожний з мікроскопів має свої недоліки. Оскільки виникає сумнів щодо достовірності реплік, одним з найважливіших достоїнств скануючого мікроскопа є те, що він дозволяє обходитися без реплік. Зображення, отримані за допомогою скануючого мікроскопа, мають велику глибину, тоді як зображення, отримані за допомогою мікроскопа в проходячому пучку, більш детальні.

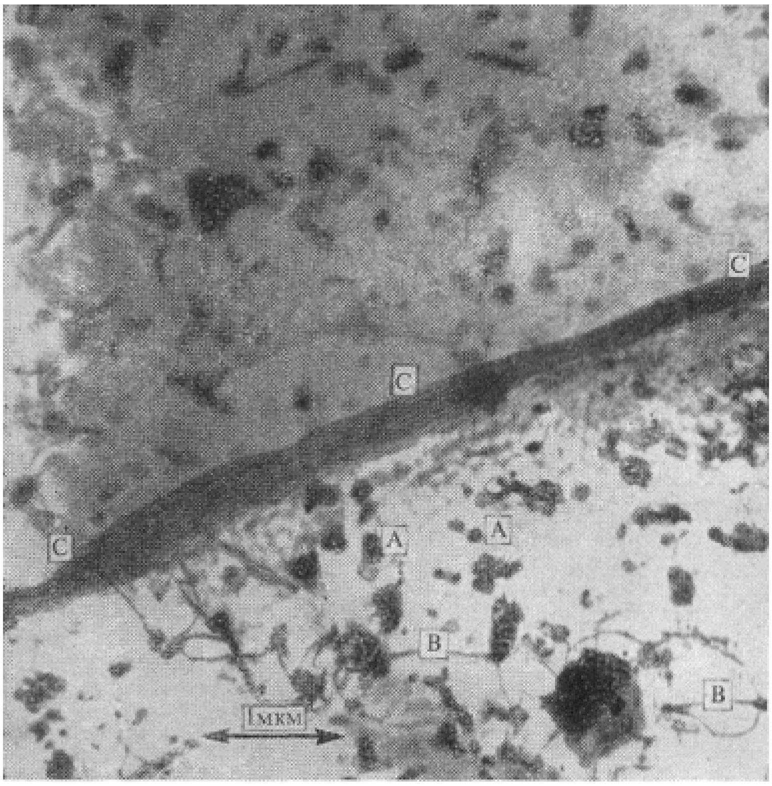


Рис. 2.4. Електронна мікрофотограма сплаву Al — Zn — Mg у проходячому пучку:
А — *частинки;* В - *дислокації;*
по лінії С—С—С проходить межа кристалічного зерна

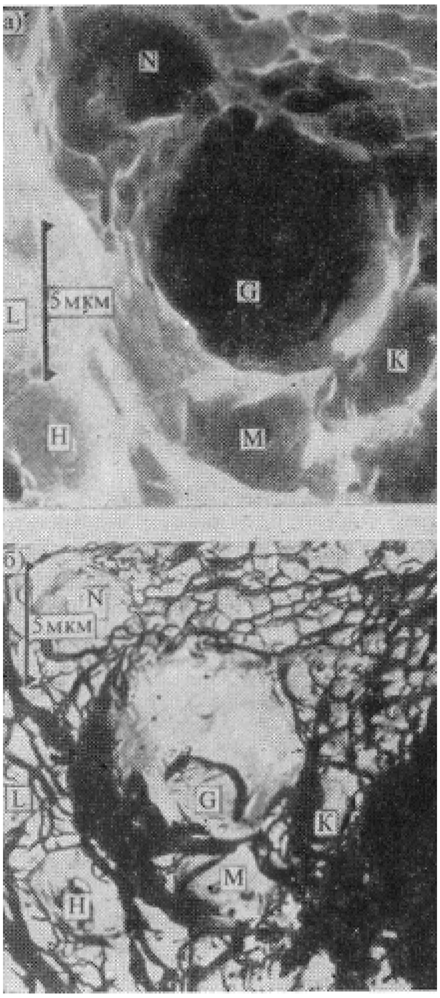


Рис. 2.5. Електронні мікрофотограми однієї і тієї ж ділянки репліки.
Відповідні точки позначені однаковими буквами.
В'язке руйнування сплаву Al — Cu — Mg

Руйнування сколом

Термін «в'язкість» служить для позначення здатності матеріалу сприймати пластичні деформації і поглинати енергію до і під час руйнування. Терміни «крихкий» і «пластичний» використовується для розрізнення типів руйнувань або матеріалів, що характеризуються слабою або сильною в'язкістю. Руйнування сколом — найкрихкіша форма руйнування, яке може відбутися в кристалічних матеріалах. Крихкі руйнування в кораблях, мостах, наливних танках привели до того, що руйнування сколом стало найпоширенішим типом руйнувань. При низьких температурах і великих ступенях деформації вірогідність крихкого руйнування збільшується, як це проілюстровано на діаграмі вязкохрупкого переходу в сталі (рис. 2.6). Нижче рівня переходу для руйнування потрібна лише невелика енергія, при цьому сталь поводиться як крихкий матеріал.

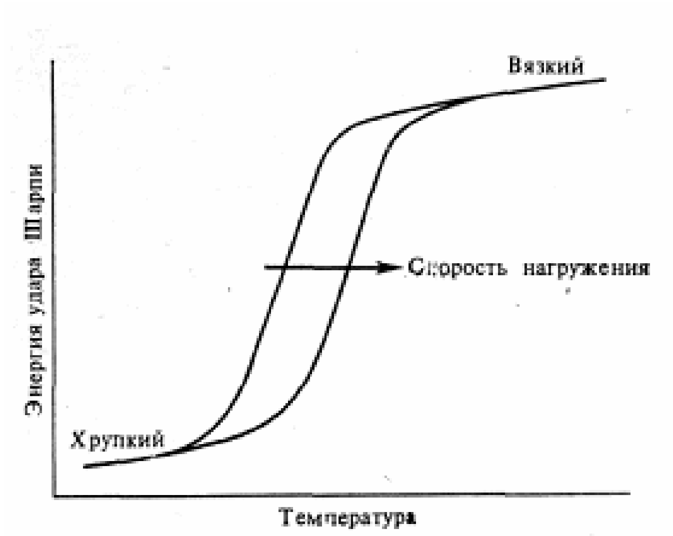


Рис. 2.6. В’язкокрихкий перехід у сталі

Руйнування сколом відбувається завдяки простому розриву атомних зв'язків при безпосередньому відділенні кристаллографических площин. Його головною особливістю є те, що він пов'язаний з певною кристалографічною площиною. Залізо, наприклад, руйнується сколом уздовж кубічних площин (100) кристалів. При цьому поверхня руйнування в межах одного кристалічного зерна порівняно плоска, як показано на рис. 2.7.

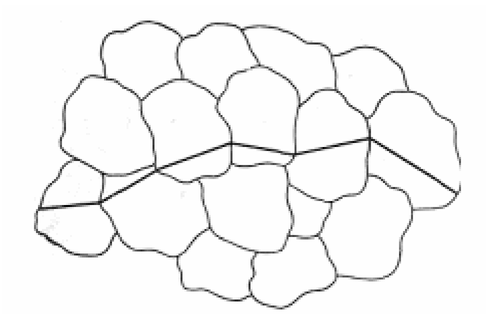


Рис. 2.7. Розповсюдження тріщини через кристалічні зерна при крихкому руйнуванні

Оскільки сусідні кристалічні зерна мають різну орієнтацію, крихке руйнування на межі кристалічного зерна змінює свій напрям і продовжує розповсюджуватися в найвигіднішій поверхні сколу. Плоскі грані сколу усередині кристала мають високу відбивну здатність, що робить поверхню крихкого руйнування блискучою, як видно з рис. 2.8.

Розглядаючи грані сколу в оптичний або електронний мікроскоп, можна помітити, що ця поверхня має невеликі нерівності. В межах одного кристалічного зерна тріщина може розповсюджуватися одночасно у двох паралельних кристалографічних площинах (рис. 2.9, *а*). Дві паралельні тріщини з'єднуються по лінії, перекриваючи одна одну, або за рахунок повторного сколу, або за рахунок зсуву з утворенням сходинки. Сходинки сколу можуть також зародитися усередині кристала при проходженні тріщини через гвинтову дислокацію як показано на рис. 2.9, *б*.

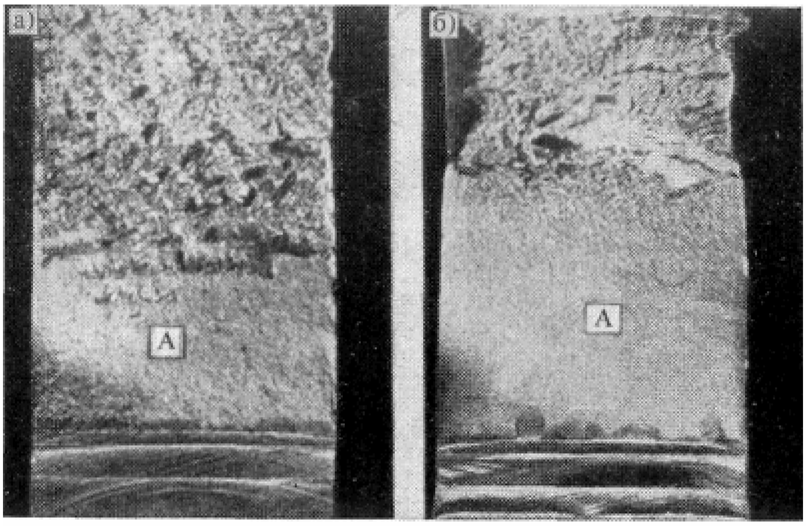
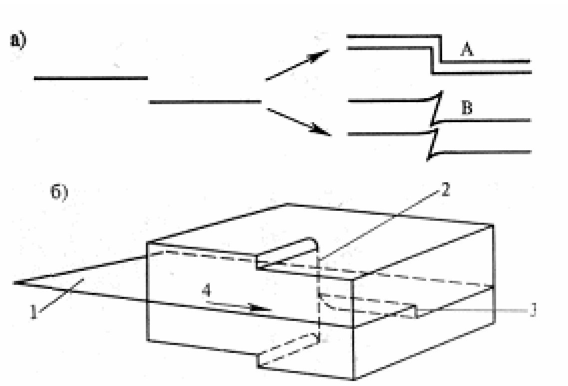


Рис. 2.8. Крихке (*а*) і в'язке (*б*) руйнування в маломіцної сталі, викликані тріщиною при циклічному навантаженні (область А).

Як правило, сходинка сколу паралельна напряму розповсюдження тріщини і перпендикулярна площині тріщини, оскільки при цьому енергія її утворення є мінімальною через те, що мінімальна додаткова вільна поверхня. Декілька сходинок сколу можуть об'єднатися і утворити складову сходинку; можуть об'єднатися також сходинки протилежних знаків, що приведе до їх зникнення. Злиття сходинок сколу приводить до утворення річкових узорів, які отримали свою назву через схожість з річкою, що має притоки. Річкові узори часто утворюються при проникненні тріщини через межу кристалічного зерна, як показано на рис. 2.9, в. Тріщина сколу розповсюджується уздовж певної кристаллографической площини: коли тріщина проходить через межу кристалічного зерна, їй доводиться проникати у кристалічне зерно з іншою орієнтацією. Якщо межа кристалічного зерна вітіювата (рис. 2.9, в), то тріщина може знов зародитися у в уже абсолютно інакше орієнтованої площини сколу. Це може відбутися в декількох місцях і привести до утворення тріщини в новому кристалі.



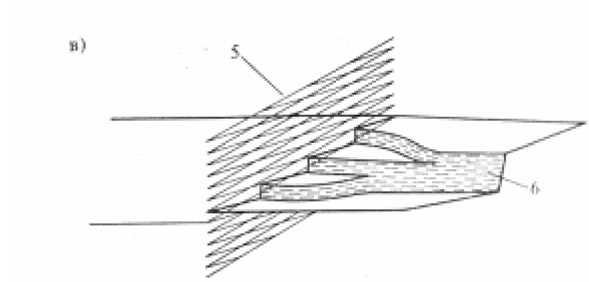


Рис. 2.9. Утворення сходинок сколу:
а — з'єднання паралельних тріщин за рахунок повторного сколу (*а*) або зсуву (*в*);
б — утворення сходинок сколу при проходженні тріщини через гвинтову дислокацію;
в — утворення річкового узору після проходження тріщини через межу кристалічного зерна;
1 —площина тріщини; 2 — гвинтова дислокація; 3 — сходинка сколу; 4 — напрям розповсюдження тріщини; 5 — криволінійна межа; 6 — річковий узор

При цьому можуть утворитися декілька сходинок сколу, об'єднання яких приведе до утворення річкового узору. Притоки річкового узору завжди з'єднуються в «нижній течії», що дає можливість визначити по мікрофотографії напрям розповсюдження локальної тріщини. Сходинки сколу і річкові узори видно на електронній мікрофотографії, представленій на рис. 2.10. В цих місцях можлива невеликі зони пластичних деформацій. Для утворення пластичних деформацій необхідна енергія, тому річкові узори і сходинки сколу найбільш часто спостерігаються при температурах, близьких до температури вязкокрихкого переходу.

Відмінною рисою руйнування сколом є також язики сколу, що отримали назву через свою форму. На рис. 2.11 зображено язики сколу різних розмірів. Вважають], що вони утворюються при місцевому руйнуванні уздовж поверхні розділу двійникових кристалічних грат (двійникові кристали утворюються в результаті великих деформацій, виникаючих перед тріщиною, що розвивається). Існує думка, що в залізі язики утворюються тоді, коли тріщина сколу, розвиваючись уздовж площини (100), перетинає поверхню розділу двійникового кристала (112) і розповсюджується по ній на деяку відстань, тоді як в двійниковому кристалі продовжується скол уздовж площини (100). Остаточне відділення відбувається при руйнуванні двійникового кристала.

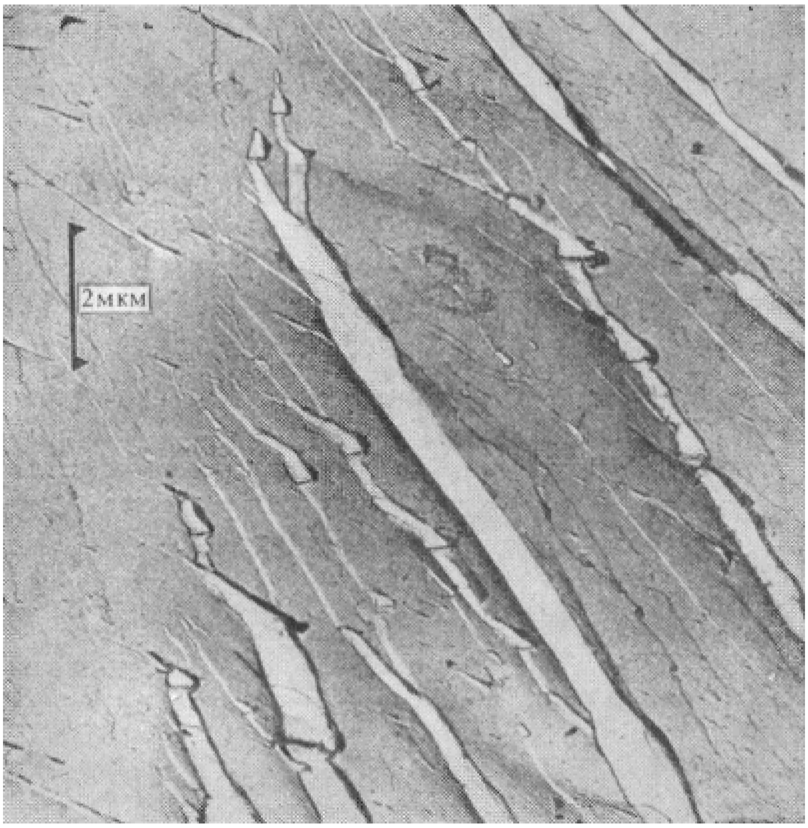


Рис. 2.10. Сходинки сколу і річкові узори
в м'якій сталі на межах кристалічних зерен

Рис. 2.11. Язики сколу (вказані стрілками)

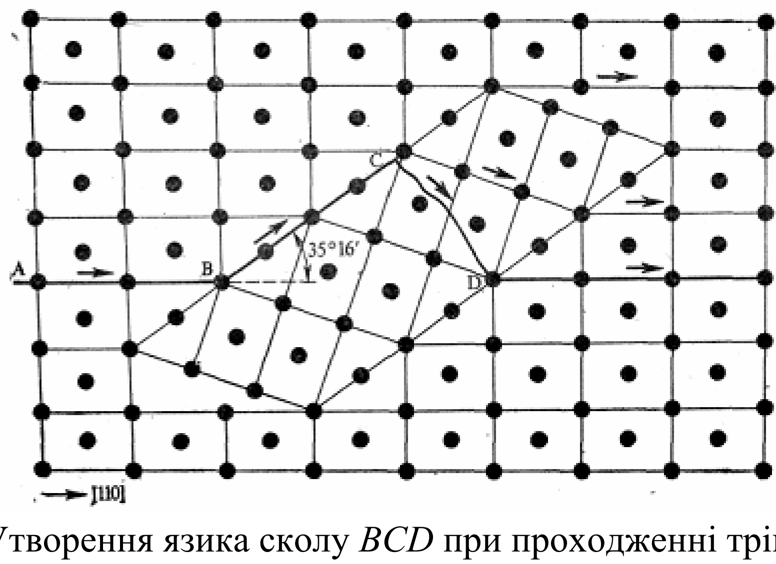


Рис. 2.12. Утворення язика сколу *BCD* при проходженні тріщини через двійниковий кристал

На рис. 2.13 приведено зображення іншої характерної для сколу особливості —шевронної структури. Цей рисунок є фрактографією поверхні сколу м'якої сталі — з низьким змістом вуглецю. Вважають, що пряма смуга між стрілками в центрі шевронной структури (тобто її стовбур) є площиною сколу (100) а гілки по обидві сторони від неї є перетинами поверхні (1000) з двійниковими кристалами. Наявність на гілках язиків *E* підтверджує цю точку зору. За нормальних умов в кристалічних структурах з гранецентрованими кубічними гратами скол не відбувається: в цих матеріалах, перш ніж напруження досягне величини напруження сколу, завжди утворюються значні пластичні деформації. Скол утворюється в кубічних об'ємно-центрованих структурах (*bcc*) і в гексагональних структурах з щільною упаковкою (*hcp*). До сколу, зокрема, схильне залізо і маловуглецева сталь (*bcc*). Вольфрам, молібден, хром (все *bcc*), а також цинк, берилій і магній (все *hcp*) — матеріали, здатні руйнуватися сколом.

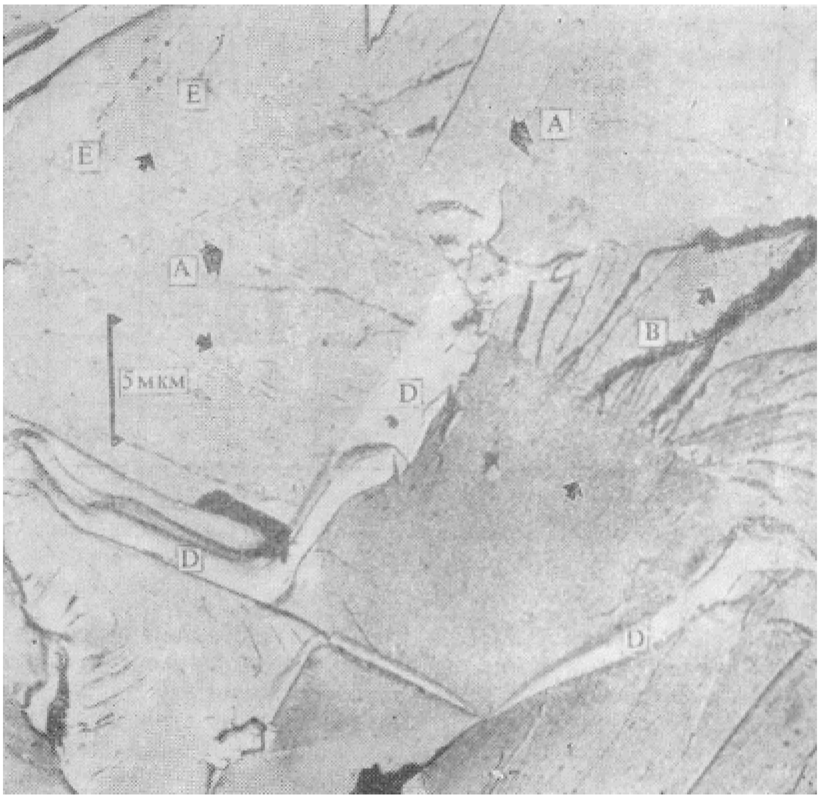


Рис. 2.13. Шевронна структура (відзначена стрілками);
річковий узор B*; великі ступені* D*; язики* E.
Маленькі стрілки указують місцевий напрям розповсюдження тріщини

В'язке руйнування

Руйнування, наступаюче при однократному прикладенні постійно зростаючого навантаження, може бути або крихким, або пов'язаним з пластичними деформаціями, тобто істотно в'язким. Для останнього типу руйнування величина пластичної деформації, необхідної для руйнування, за певних умов може бути обмеженою так, що при руйнуванні витрачатиметься порівняно невелика енергія. В цьому випадку, з інженерної точки зору, руйнування залишається крихким і може бути викликане гострою виїмкою або тріщиною при порівняно малих номінальних напруженнях, особливо коли плоский деформований стан зменшує можливість утворення пластичних деформацій.

Найвідомішим типом пластичного руйнування є руйнування при перевантаженні розтягуючими силами – класичне руйнування з чашкою і конусом. По досягненні максимального навантаження пластичне подовження призматичного зразка стає неоднорідним і концентрується в невеликій частині зразка так, що утворюється шийка. В особливо чистих металах, в яких практично відсутня частинки другого роду, пластичні деформації на парних площинах ковзання можуть продовжуватися до тих пір, поки утворення шийки не приведе до тому, що площа перетину у вузькому місці стане рівною нулю (рис. 2.14). Геометрично таке руйнування характеризується послідовними деформаціями зсуву. Як приклад на рис. 2.15 показано монокристали, майже повністю зруйновані за рахунок зсуву по одній площині ковзання.

В конструкційних матеріалах завжди міститься велика кількість частинок другого роду. Можна виділити три типи частинок:

- великі частинки, видимі в оптичний мікроскоп. Їх розмір може мінятися в межах від 1 до 20 мкм. Звичайно вони складаються з складних з'єднань різних легуючих добавок. Легуючі добавки вносять для поліпшення ливарних якостей або інших властивостей. Ці частинки суттєво не впливають на міцність матеріалу.
- проміжні частинки, видимі тільки в електронний мікроскоп. Їх розмір має порядок 500–5000 А. Ці частинки можуть також складатися з складних з'єднань різних легуючих добавок. Іноді вони впливають на властивості матеріалу, як у випадку металів, зміцнених дисперсією оксидів (наприклад, Al–Al2O3 або Ni–ThO2), і у випадку сталей, в які частинки карбіду такого розміру вносять навмисно;
- осаджені частинки, видимі в деяких випадках в електронний мікроскоп. Їх розмір має порядок 50-500 ангстрем. Ці частинки утворюють у сплаві спеціально, щоб отримати необхідну границю текучості.

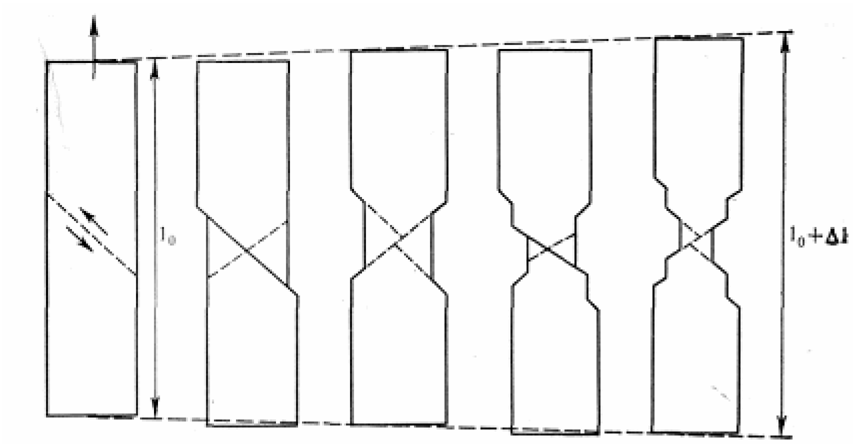


Рис. 2.14. Руйнування в чистому металі за рахунок деформації зсуву (ковзання)

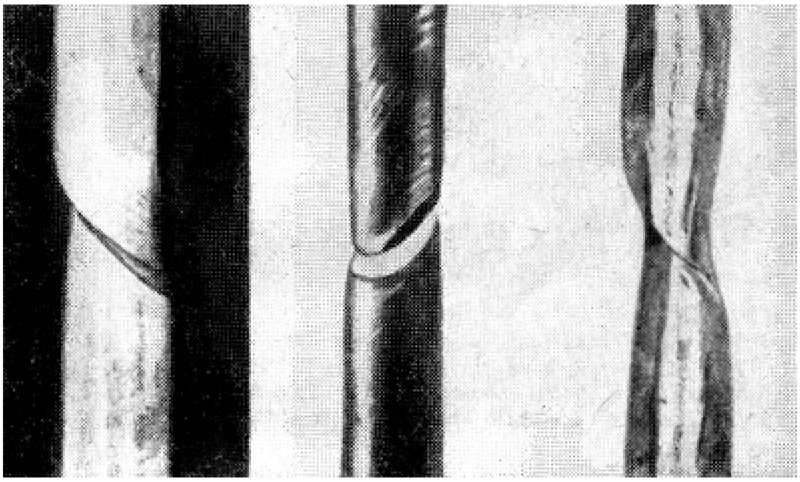


Рис. 2.15. Деформації зсуву в монокристалах чистої міді

Крупні частинки часто бувають дуже крихкими і не можуть пристосуватися до пластичних деформацій оточуючих кристалічних грат. Тому при великих пластичних деформаціях кристалічних грат вони дуже скоро руйнуються, що веде до утворення в них пустот. Утворення пустот у великих частинках можна спостерігати за допомогою оптичного мікроскопа На рис. 2.16 показано різні етапи цього процесу. При порівнянні відстаней між певними включеннями на різних етапах можна помітити збільшення деформації.

З рисунка видно, що пустоти породжуються великими частинками вже при малих деформаціях порядка декількох відсотків, тоді як остаточне руйнування відбувається при деформаціях порядка 25 %. Тому великі включення, видимі в оптичний мікроскоп, не можуть бути відповідальні за процес руйнування, хоча вони і зменшують в'язкість матеріалу. Руйнування цих частинок приводить до утворення концентрації напружень і локального збільшення деформації. Якби ці частинки були відсутні, то досягти таких деформацій можна було б тільки за рахунок загальної деформації всіх точок матеріалу. Це значить, що крупні включення можуть визначати час і місце в'язкого руйнування, але не грають ролі в самому процесі в'язкого руйнування.

Вважається, що руйнування породжується набагато більш дрібними частинками — менше мікрона. Оскільки ці частинки не можуть деформуватися так само легко, як кристалічні грати, то при виникненні в їх околі обширної пластичної зони вони втрачають зчеплення з кристалічними гратами. Таким чином утворюються мікроскопічні пустоти, які ростуть за рахунок ковзання: в матеріалі між пустотами утворюється шийка, при цьому площа перетину в цьому місці зменшується на 100% (див. рис. 2.14)..

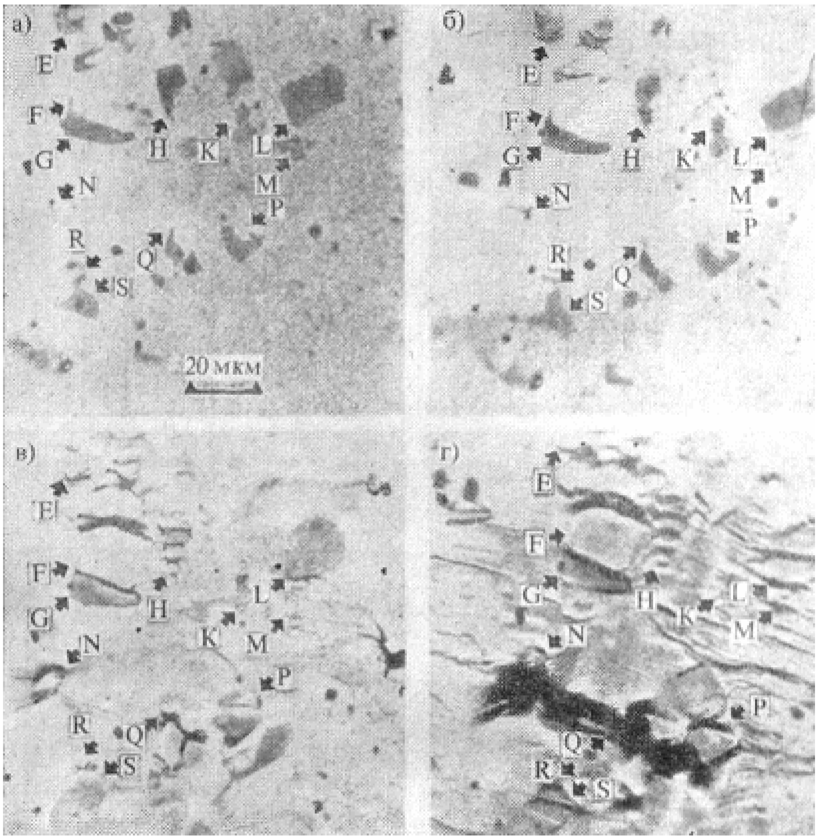


Рис. 2.16. Утворення тріщин в крупних частинках сплаву Al–Cu–Mg.
Зверніть увагу на розвиток тріщини між точками N, Q *і* P.
Розтягування відбувається у вертикальному напрямі і складає:
а–3%; б–6%; в–14%; г–25%

Подібний механізм зародження, зростання і злиття мікропустот має на електронних микрофотограмах відмінні риси. Розглядаючи зруйновану поверхню в мікроскоп, можна помітити, що вона складається з маленьких ямок, які є пустотами, що злилися (рис. 2.17). В більшості випадків ініціаторами утворення ямок є частинки, тому пустоти легко розпізнати.

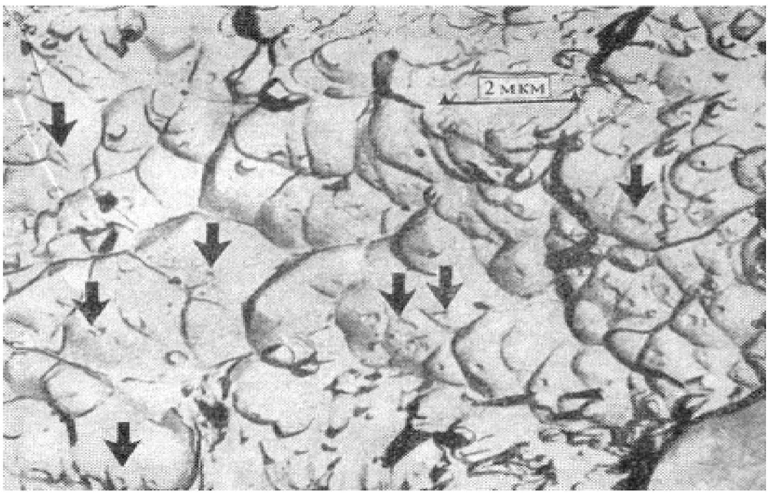


Рис. 2.17. Утворення ямок за рахунок частинок проміжних розмірів
(ямки вказані стрілками). Алюмінієвий сплав

Через випадкове розташування пустот ямки завжди мають неправильну форму. Форма ямок, в якій вони з'являються в полі зору мікроскопа, залежить від системи навантажень, діючих під час їх утворення і від кута, під яким вони розглядаються в мікроскоп. Рівновісні ямки можуть утворюватися тоді, коли напруження є головним чином розтягуючими (рис. 2.18, а), а подовжені ямки — у разі зсуву або розриву (рис. 2.18, б, в). На рис. 2.19 представлено обидва типи ямок.

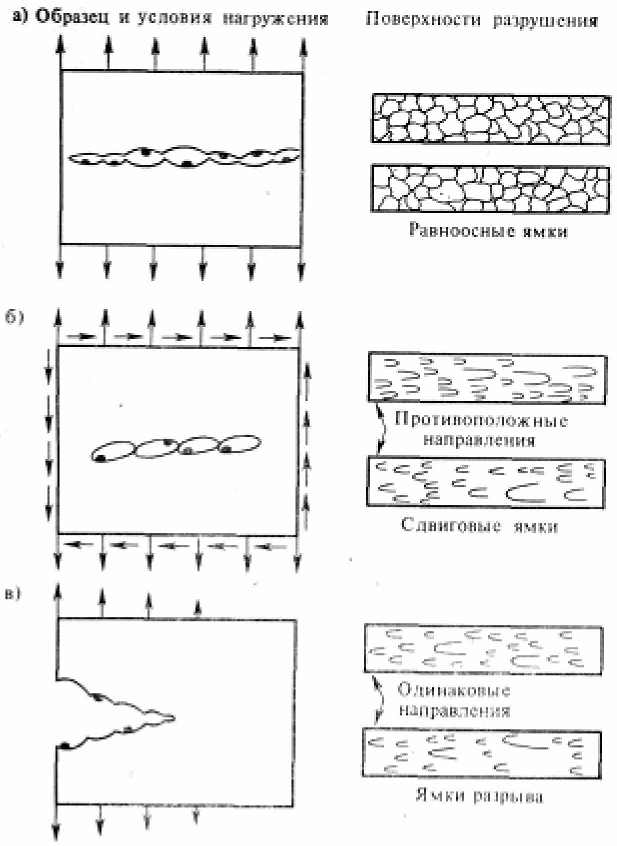


Рис. 2. 18. Утворення ямок різних типів

Деякі відомості щодо процесу зростання і злиття ямок можна отримати, вивчаючи контури цих ямок. Зріз не завжди проходитиме через центр ямки, але середнє відношення глибини ямки до її ширини в цьому перетині буде близьке до дійсного відношення глибини ямки до її ширини. Таким чином, рис. 2.20 дозволяє затверджувати, що відношення глибини ямки до її ширини невелике і що ямки є порівняно неглибокими раковинами. Останнє підтверджується стереоскопічними вимірюваннями топографії ямок. Очевидно, пустоти ростуть в основному в поперечних напрямах і тому залишаються дрібними.

В матеріалах, зміцнених за рахунок дисперсії оксидів, процес утворення і зростання пустот в околиці дисперсних частинок можна зробити видимим, якщо піддати тонку плівку деформації розтягування і спостерігати її в електронний мікроскоп. В звичайних структурних матеріалах пустоти навкруги частинок проміжного розміру зустрічаються рідко.

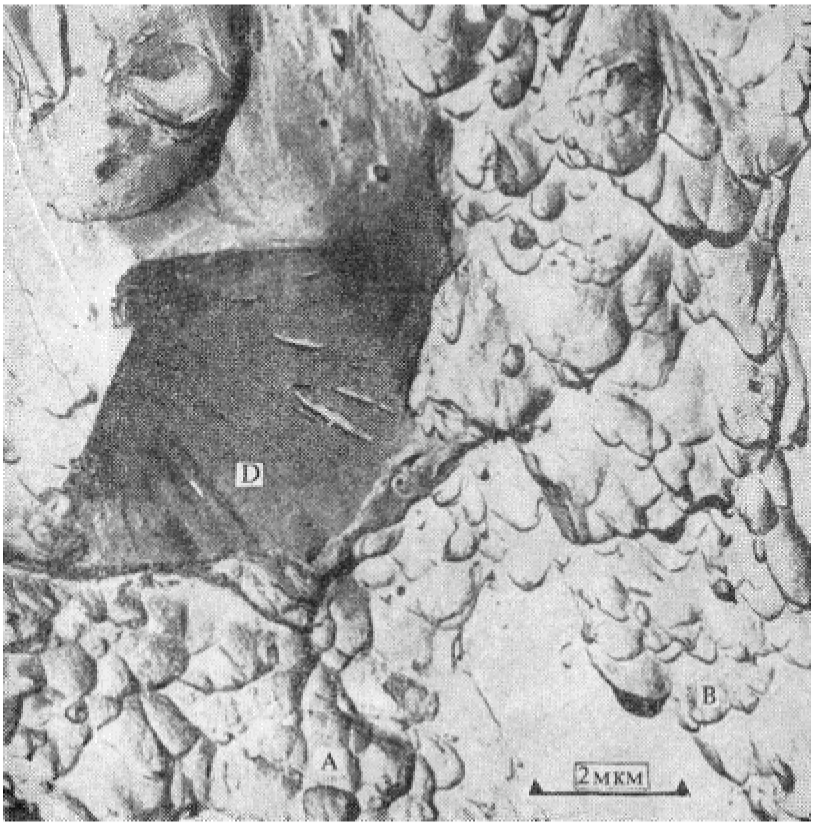


Рис. 2.19. В області *A* знаходяться рівновісні ямки; в області *B* — параболічні ямки. Буквою *D* відзначена велика зруйнована сколом частинка (того ж типу, що і на рис. 2. 16.). Алюмінієвий сплав 2024-Т3

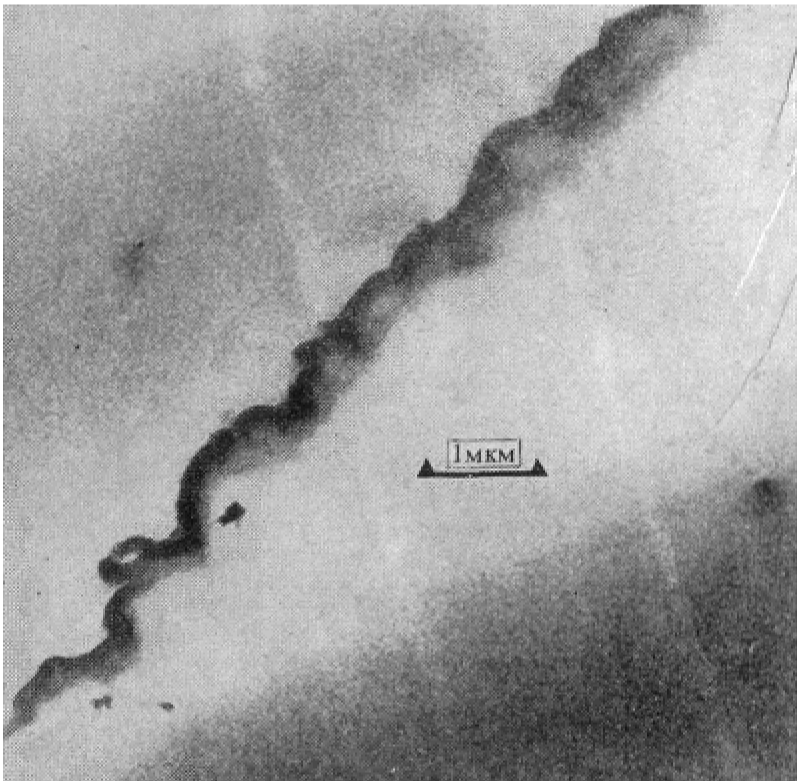


Рис. 2.20. Поперечний перетин репліки ямок

Очевидно, сили зчеплення між кристалічними гратами і частинками в звичайних матеріалах надзвичайно великі. Вони настільки великі, що утворення пустот не відбувається аж до самої останній стадії процесу руйнування. Невелика кількість досліджених пустот дозволяє зробити наступне припущення: у момент утворення якоїсь кількості пустот повинно відбуватися їх негайне злиття. Це означає, що пустоти можуть зароджуватися тільки при таких великих напруженнях і деформаціях, коли умови для їх злиття вже виконані. Тому необхідна модель утворення пустот, яка передбачає їх миттєве і спонтанне зростання. (При описі зростання пустот в матеріалах, зміцнених дисперсією оксидів, як наголошувалося, зростання цих пустот відбувалося у напрямі розтягуючих напружень. Цей тип зростання пустот є звичайною послідовністю поздовжніх деформацій, як це відбувалося б і в пружному стані.) З фізичної точки зору треба було б чекати, що порожнини розповсюджуються переважно в напряму, перпендикулярному розтягуючим напруженням, як у випадку тріщини. Це поперечне зростання пустот підтверджується невеликою глибиною ямок.

Модель, що узгоджується до певної міри з результатами спостережень, полягає в наступному. В процесі пластичної деформації навкруги частинок утворюється скупчення дислокацій. Ці ряди петель дислокацій зображені на рис. 2.21, а. Петлі виштовхуються частинкою під дією уявних сил. З другого боку, під дією напружень, породжених скупченням дислокацій, і прикладених ззовні дотичних напружень основна петля притягуватиметься до частинки. Як тільки одна або дві петлі притягнуться до поверхні частинки, відбудеться остаточне розчіплення частинки з середовищем, внаслідок чого утворюється виїмка. Внаслідок цього сили відштовхування, діючі на відповідні петлі, різко зменшаться і велика частина скупчення дислокацій може розсмоктатися, утворивши при цьому нову виїмку. Джерела дислокацій зовні петель деформацій, які під дією нагромадження дислокацій усередині петель припиняють свою діяльність, можуть відновити її. Отже, такий процес може привести до нестабільного зростання пустот в поперечному напрямі і їх злиттю відразу після зародження пустот (рис. 2.21, в, г). На рис. 2.22 цю модель показано в переміщеннях.

В протилежність руйнуванню сколом, при якому для відділення достатньо прикласти розтягуючі напруження, в'язке руйнування не може відбутися без пластичної деформації. Механізм остаточного відділення є послідовністю пересувань дислокацій і переміщень ковзання, необхідних для зростання і злиття пустот.

Незалежно від напружень для здійснення руху дислокації і в'язкого відділення необхідна певна пластична деформація. Ця пластична деформація може бути зосереджена в межах невеликого об'єму матеріалу, через який відбувається руйнування. В цьому випадку руйнування відбувається при порівняно невеликій пластичній деформації в макромасштабі і при невеликих витратах енергії. З інженерної точки зору, таке руйнування — крихке.

Руйнування цього типу, викликані тріщинами, характерні для високоміцних матеріалів.

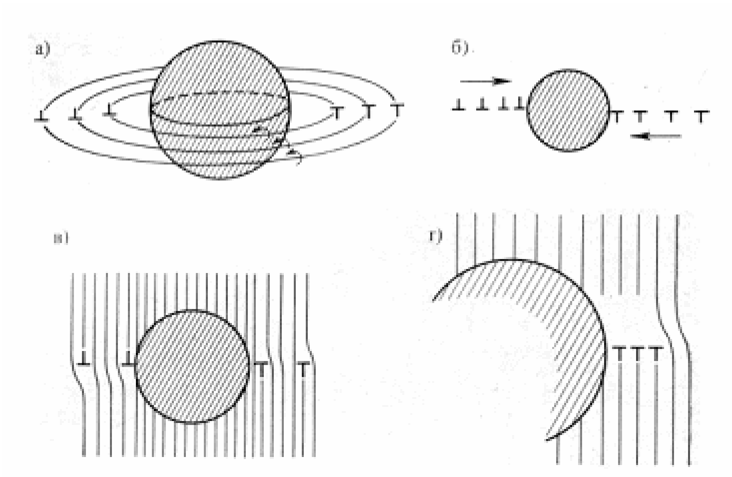


Рис. 2.21 Модель дислокації утворення і зростання пустот:
а — скупчення петель; б — поперечний перетин;
в — більш докладний рисунок; г — утворення ямки (по Пергамону)

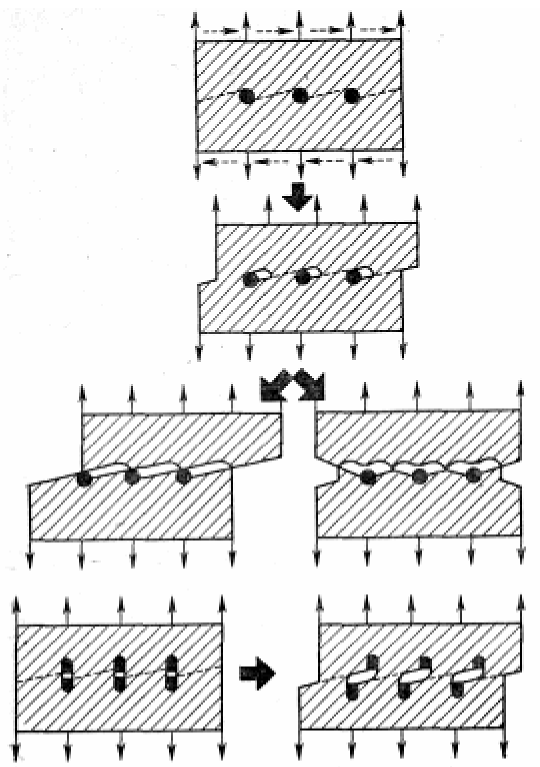


Рис. 2.22 Злиття пустот за рахунок ковзання

Втомні тріщини

Під дією циклічних навантажень в результаті циклічних пластичних деформацій можуть утворюватися тріщини. Навіть якщо номінальні напруження набагато нижчі за межу пружності, локальні напруження через наявність концентрацій напружень на включеннях або механічних пошкодженнях можуть бути вищими за границю текучості. Отже, пластичні деформації утворюються локально в мікромасштабі, але цього недостатньо для того, щоб вони були помітні візуально.

Для пояснення зародження втомних тріщин локальними пластичними деформаціями було запропоновано декілька еквівалентних моделей. Модель Вуда зображена на рис. 2.23. Протягом тієї частини циклу, коли навантаження зростає, на найбільш вдало розташованій площині відбувається зсув. На падаючій частині циклу зсув у зворотному напрямі відбувається на паралельній площині ковзання, оскільки зсув по першій площині утруднений механічним зміцненням і окисленням тільки що створеної вільної поверхні. В цьому першому циклі зсуву може відбутися видавлювання або вдавлювання поверхні металу. При послідовних циклах в умовах пластичної течії, що безперервно продовжується, вдавлювання може перерости в тріщину (рис. 2.23). Якщо в процесі циклічного навантаження напруження залишаються розтягуючими, то цей механізм все одно працює, оскільки виникаючі при зростанні навантаження пластичні деформації під час розвантаження можуть з'явитися причиною залишкових стискуючих напружень. Приклад утворення тріщини в циклічному процесі навантаження представлено на рис. 2.24.

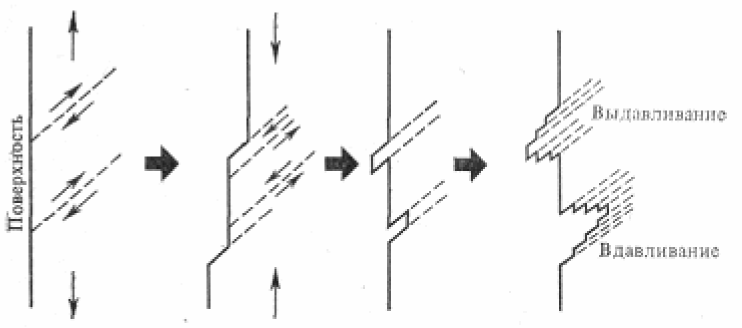


Рис. 2.23. Модель зародження втомної тріщини Вуда

Втомна тріщина, одного разу утворившись, може рости за рахунок зворотного зсуву. Декілька етапів зростання втомної тріщини показано на рис 2.25. В полі розтягуючих напружень гостра тріщина викликає утворення великих концентрацій напружень при її вершині, де дуже легко може відбутися зсув. В матеріалі перед тріщиною (етапи *1* і *2* на рис. 2.25) по одній з відповідних площин ковзання у напрямі найбільшої дотичної напруження може відбутися зсув. Завдяки цьому зсуву тріщина розширяється, одночасно збільшуючись по довжині. Тепер може відбутися зсув в іншій площині (етап *3*). Механічне зміцнення і напруження, що збільшується, остаточно ослабляє інші паралельні площини зсуву, що робить вершину тріщини тупою (етап *4*). На зростаючій частині циклу тріщина просувається на величину $\Delta \boldsymbol{a}$.

Пластична деформація виникла в невеликому об'ємі, розташованому в області пружних деформацій. При розвантаженні область пружних деформацій буде стискатися, а область пластичних деформацій, що стала дуже великою, більш не відповідатиме своєму оточенню. Для того, щоб ця відповідність не була порушена, під час розвантаження ділянки циклу навантаження на область пластичних деформацій з боку пружної області діють стискаючі напруження. Ці стискаючі напруження знов перевищуватимуть межу текучості, принаймні, у вершині тріщини. Отже, тут має місце зворотна пластична деформація, яка приведе до зближення країв тріщини і відновлення гостроти її вершини (етап 5).

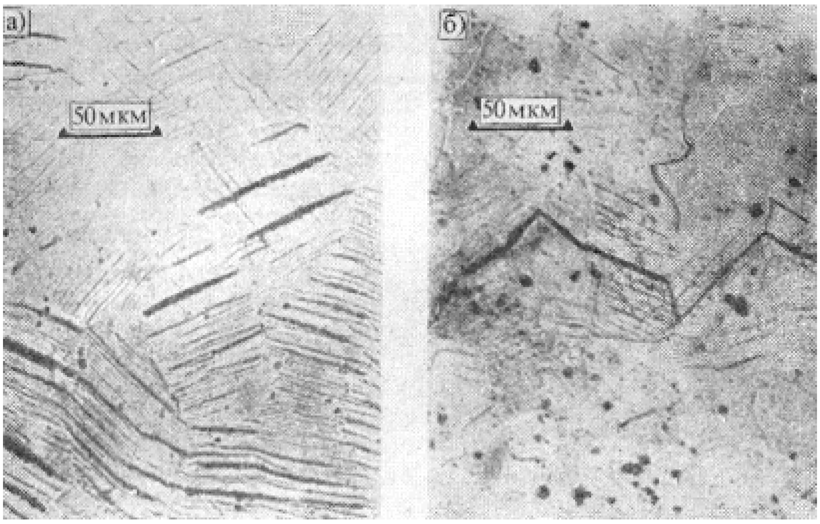


Рис. 2.24 Зародження втомної тріщини в алюмінієвому сплаві (по Сиджву):
— вдавлювання і видавлювання; б *— тріщина, що утворилася за рахунок зсуву*

Циклічне розширення і стиснення тріщини (етапи *1—5* і *6—7*) приводить до утворення типового рисунка, причому кожний новий цикл додає нову риску. Ці риски на поверхні руйнування видно в електронний мікроскоп; їх називають рисками утомленості. На рис. 2.28 показано риски утомленості промислового сплаву Al–Cu–Mg.

На рис. 2.25 представлена модель утворення рисок, яка дає загальне уявлення про процеси притуплення вершини тріщини і відновлення її гостроти. Ця модель синтезує різні моделі і дозволяє дати оцінку механізму зростання втомної тріщини, достатню для того, щоб служити базою для вивчення основ механіки руйнування.. Іноді в процесі розповсюдження втомної тріщини може включатися механізм руйнування сколом. При цьому утворюються крихкі риски. Ці риски є послідовними положеннями фронту тріщини при її розповсюдженні. До цього висновку можна прийти на основі рис. 2.27, на якому представлено електронну мікрофотограмму зразка, підданого програмованому випробуванню на втомну міцність. Програма навантаження складалася з п'яти циклів малої амплітуди 6 ± 2 кгс/мм2, за яким слідував один цикл великої амплітуди 7 ± 3 кгс/мм2; ця послідовність повторювалася протягом всього випробування. Історія процесу навантаження легко визначається по мікрофотограмі: ділянки з п'яти рисок чергуються з широкими борознами, виникаючими за рахунок періодичних циклів більшої амплітуди.

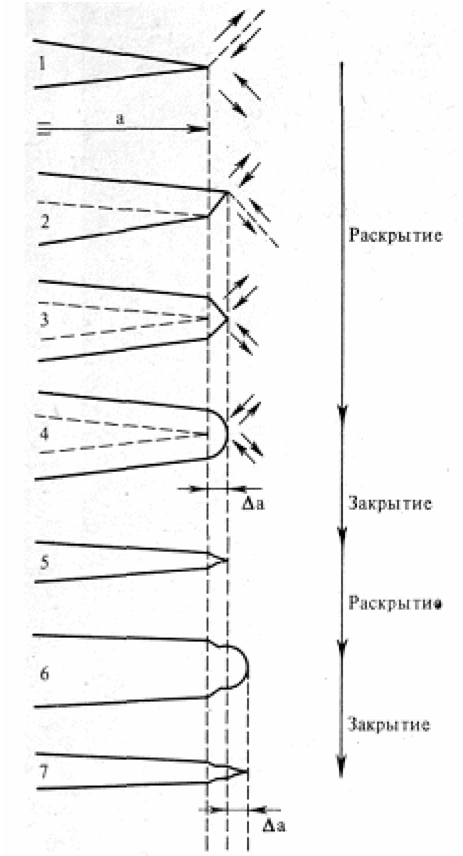


Рис. 2.25. Одна з можливих моделей зростання втомної тріщини

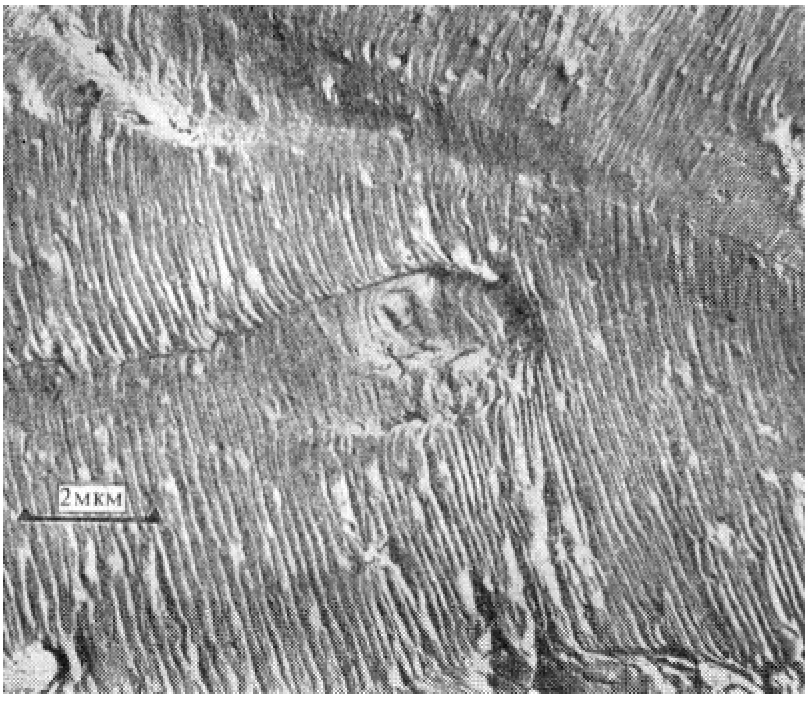


Рис. 2.26. Борозенки утомленості на поверхні сплаву Al–Cu–Mg, зруйнованого при циклічному навантаженні

Це є доказом того, що за кожний цикл утворюється одна борозна, а відстань між ними є мірою, визначальною ступінь розповсюдження тріщини за цикл. З рис. 2.26 можна зробити висновок, що за один цикл тріщина розповсюджується на 0,2 мкм. Цей факт дає можливість визначити швидкості розповсюдження тріщини при дослідженні різних випадків руйнування.

Борозни утомленості краще всього видно в алюмінієвих сплавах. Для утворення регулярної хвилеподібної структури необхідно, щоб було достатньо можливостей для пластичної деформації матеріалу в околиці вершини тріщини, з тем, щоб виконувалася умова розповсюдження її фронту. Борозни повинні мати певну довжину, інакше їх не можна вважати борознами. Можливості матеріалу для деформації повинні забезпечувати подібні деформації на деякій відстані від фронту тріщини, інакше борозни стають нерегулярними і регулярна хвильова структура не утворюється. В матеріалах з обмеженими можливостями для деформації борозни можуть бути або слабо виразимі і бути зведені до декількох відповідним чином орієнтованих кристалічних зерен, або не утворитися зовсім.

Для утворення регулярної хвилеподібної структури необхідні:

- наявність великої кількості систем зсуву і легкий зсув в поперечному напрямі, щоб утворити фронт тріщини і зберегти його при проходженні через примикаючі один до одного кристалічні зерна;
- наявність більш ніж однієї кристалографічної площини, по якій можливе зростання тріщини (див. [4]).

Якщо ці умови виконуються, то зсув, який відбувається при розширенні і стисканні тріщини, може пристосуватися до умов фронту тріщини, що дає можливість утворення добре помітних борозенок. Очевидно, це справедливо для алюмінієвих сплавів.

Якщо вищенаведені вимоги не виконані, зсув буде нерегулярним і утворення періодичної хвилеподібної структури стане неможливим. Орієнтація окремих кристалічних зерен може бути відповідної для утворення регулярної хвилеподібної структури, але обмежені можливості для ковзання можуть перешкодити утворенню борозенок на скільки-небудь значну довжину уздовж фронту тріщини в сусідніх кристалічних зернах з іншою орієнтацією. В цих випадках звичайно спостерігаються слабо-позначені борозенки в невеликій кількості ізольованих кристалічних зерен і спутані сліди ковзання в оточуючих кристалічних зернах. Подібна картина представлена на рис. 2.28. У випадку якщо кристалічні зерна деформуються слабо, борозенки можуть не утворитися зовсім. Якщо деформації піддається лише область поблизу кристалічного зерна, то втомне руйнування може навіть відбутися усередині кристалічного зерна, як показано на рис. 2.29.

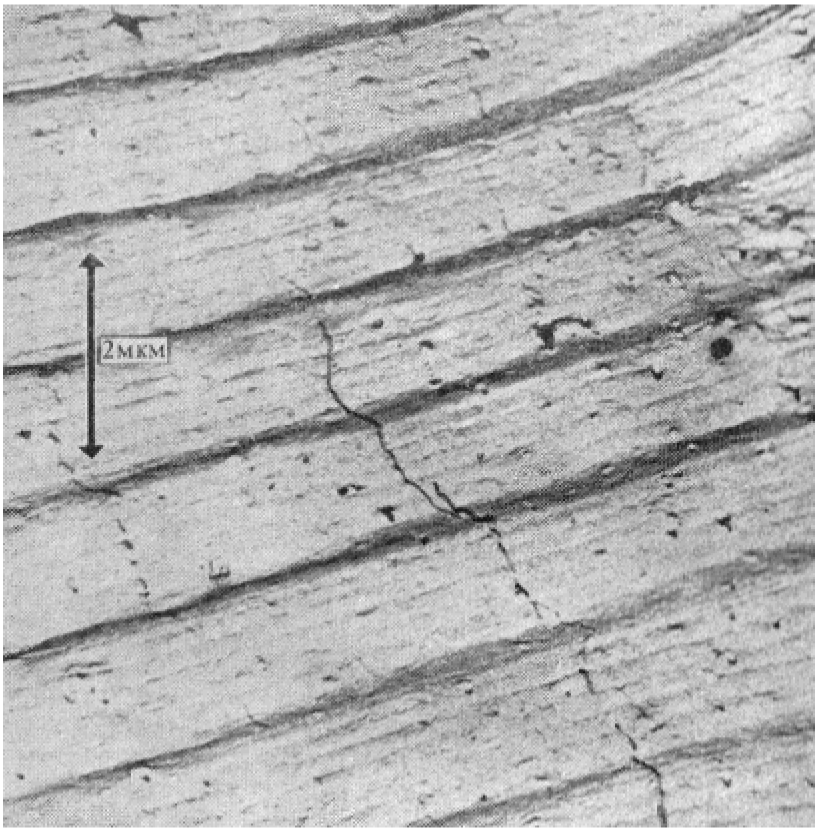


Рис. 2.27. Борозенки утомленості в сплаві Al–Zn–Mg

Виникає питання: чи впливають на процес втомного руйнування включення і частинки другого роду? Оскільки йдеться про зародження втомних тріщин, то слід чекати, що вони впливають. В гладких зразках місцями концентрацій напружень є включення. В таких місцях може виникнути необхідна пластична деформація (див. рис. 2.23). Якщо є концентрації напружень на механічних виїмках, то можна чекати, що наявність частинок не обов'язкова для зародження тріщини, оскільки додаткова концентрація напружень, виникаюча завдяки наявності частинок, не має великого значення.

З цієї ж причини слід чекати, що частинки мало впливають на процес розповсюдження тріщини. На рис. 2.32 показано вплив на процес розповсюдження тріщини порівняно великої частинки. Доти поки фронт тріщини не наблизився до частинки на дуже малу відстань, вона залишалася цілою і остання борозенка перед частинкою все ще була прямою. У цей момент, як можна бачити із слабого річкового узору на її зруйнованій поверхні, частинка руйнувалася. Через руйнування сколом частинки тріщина в цьому місці просунулася вперед, але швидкість її розповсюдження зменшилася, що можна визначити по близькому розташуванню борозенок перед частинкою. Розташування борозенок в області указує на слабе збільшення швидкості розповсюдження тріщини всього на декілька циклів, яке має місце через просування тріщини в місці сколу частинки. Розташування борозенок в області ***B*** показує, що праворуч від частинки збільшення швидкості відбулося пізніше. Не дивлячись на те, що частинка, поза сумнівом, зробила вплив на локальне розповсюдження тріщини, середня швидкість розповсюдження тріщини істотним чином не змінилася, якщо взяти до уваги розмір частинки. З рис. 2.30 видно також, що безліч більш дрібних частинок, які були витягнуті з матриці, не робили помітного впливу на процес розповсюдження тріщини, що можна укласти з незмінного розташування борозенок.

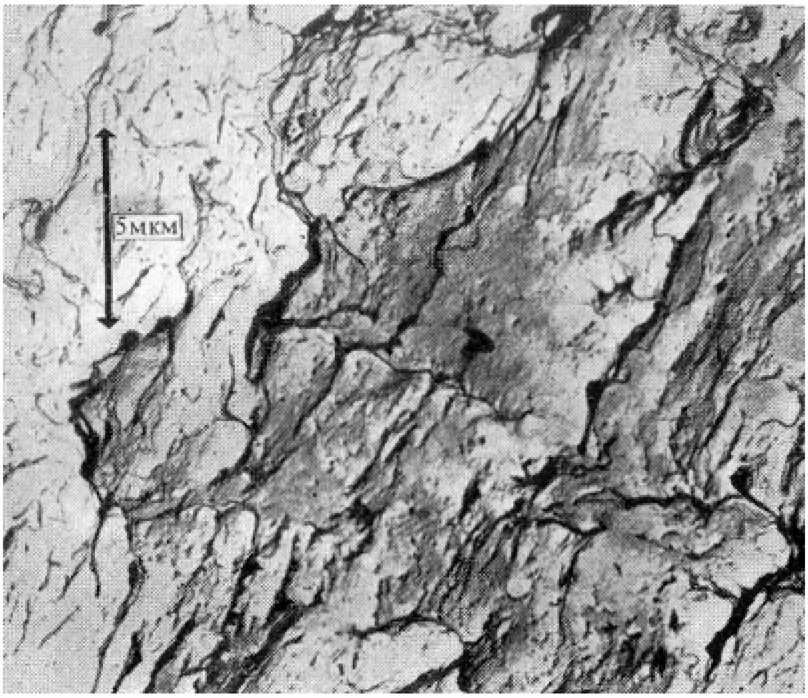


Рис. 2.28. Слабо розвинуті борозенки у високоміцній маловуглецевій сталі

При великих швидкостях розповсюдження тріщини (порядку 1 мкм за цикл і більше) картина абсолютно інша, що легко бачити з рис. 2.31. Високі швидкості розповсюдження тріщини з'являються в результаті великих интенсивностей напруження при вершині тріщини (великі тріщини або високі навантаження). Через великі концентрації напружень частинки перед вершиною тріщини можуть розколотися або вискочити з матриці, при цьому утворюється раковина (можливо, велика).

Матеріал, що залишився, між раковиною і вершиною тріщини може руйнуватися за рахунок в'язкого розриву; таким чином утворюється місцеве швидке просування тріщини на велику відстань. Це зі всією очевидністю показують області з ямками (рис. 2.31), які свідчать про механізм злиття пустот в процесі в'язкого розриву.

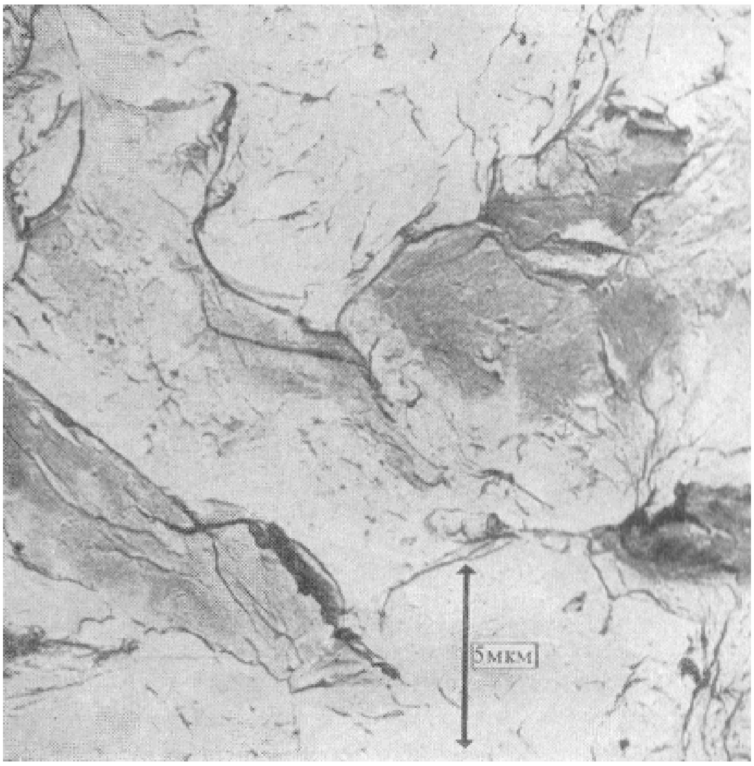


Рис. 2.29. Поверхня втомної тріщини,
яка проходить через кристалічні зерна у високоміцній маловуглецевій сталі

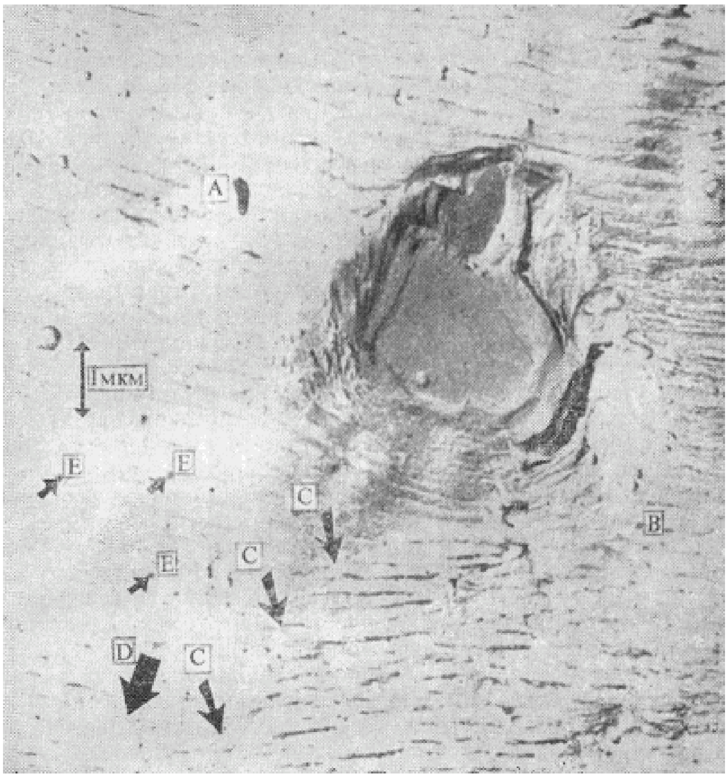


Рис. 2.30. Велика, зруйнована сколом частинка на поверхні втомної тріщини в алюмінієвому сплаві 2024-Т3. В областях А і В відстань між борозенками збільшена. Через точки С проходить межа невеликого зламу борозенок. Стрілка D указує напрям розповсюдження тріщини.
Стрілки Е указують на невеликі включення

При таких великих швидкостях розповсюдження тріщин впливом включень нехтувати не можна. Порівняння поверхонь руйнування, показує, що через невелику кількість статичних руйнувань розташування хвиль при різних швидкостях розповсюдження тріщин не однакове. При більш високих швидкостях розповсюдження тріщин відстань між борозенками збільшується, а поверхня руйнування складається головним чином з ямок. Звідси витікає, що зростання швидкості розповсюдження тріщин було б значно меншим, якби були відсутні включення. Якщо нехтувати включеннями, то швидкість розповсюдження «дійсно втомної» тріщини була б близько 0,5 мкм за цикл (рис. 2.31) замість 1 мкм за цикл — швидкості, яка дійсно спостерігалася при випробуванні.

Вплив частинок на процес розповсюдження втомної тріщини є суттєвим лише при високих швидкостях її розповсюдження. Іншими словами, частинки впливають тільки на останню, невелику, частина процесу розповсюдження тріщини. Отже, для техніки це не має великого значення, що підтверджується випробуванням матеріалів з дуже низьким змістом частинок .

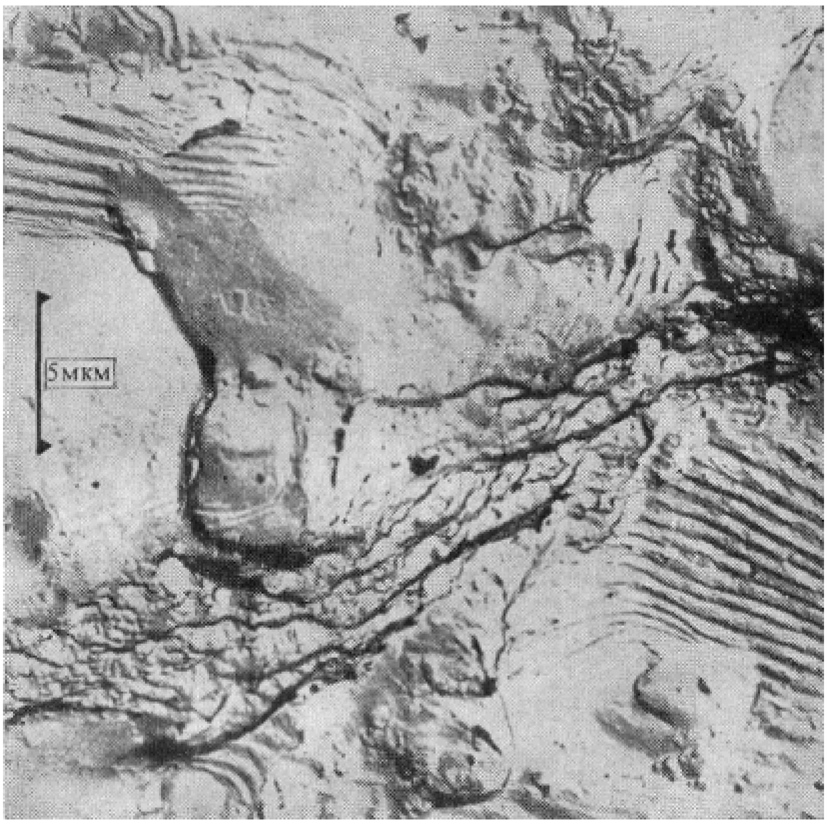


Рис. 2.31 Велика, зруйнована сколом частинка, оточена ямками, розташованими між борозенками утомленості.
Швидке розповсюдження тріщини в алюмінієвому сплаві

Утворення тріщин в матеріалах під дією навколишнього середовища

Тріщини можуть також зароджуватися і рости при низьких напруженнях. При цьому їх утворення відбувається під дією навколишнього середовища. Так, занурення металу в рідину може привести до утворення в ньому тріщин навіть при нульових напруженнях Агресивне середовище, яке викликає корозію металу, в нормальних умовах не приводить до його руйнування, проте при дії механічних напружень воно може привести до утворення тріщин. Для пояснення корозії під напруженням було висунуто декілька теорій, проте, в цьому механізмі є ще багато неясного. Особливо важка для розуміння роль механічних напружень. Природно, одна теорія не здатна пояснити усі результати спостережень; розумніше припустити, що за різних умов в різних матеріалах діють різні механізми.

В багатьох матеріалах тріщини в процесі корозії під напруженням утворюються всередині кристалічних зерен із причини, ймовірно, відмінності між поверхнею кристалічного зерна і його внутрішністю, виникаючою через роз'їдаючу дію розчину. З другого боку, це явище можна пояснити наявністю на поверхні кристалічних зерен частинок другого роду. Характерний зовнішній вигляд поверхні, зруйнованої при корозії під напруженням, показано на рис. 2.32. На рис. 2.33 представлено поверхні руйнування, які утворилися при корозії під напруженням в двох різних середовищах. Зображення граней кристалічних зерен спотворено дією корозійної речовини. При корозії під напруженням в атмосфері поверхні кристалічних зерен і розділяючі їх межі не зазнають істотних змін, що ясно видно на рисунку. В солоному ж розчині води грані кристалічного зерна згладилися, і розчин глибоко проник в шари матеріалу лежачі під поверхнею кристалічних зерен. Результати цих спостережень не можна узагальнювати. Зовнішній вигляд граней кристалічного зерна на одній і тій же поверхні руйнування має відчутні відмінності. Вчені сходяться в тому, що в деяких випадках причиною корозійного розтріскування може бути водень, що виділяється під час корозії. Наявність водню в сталях може викликати утворення тріщин навіть під час обробки. Водень може також викликати утворення тріщин у високоміцних сталях після певного періоду тривалого навантаження (статична утомленість). Під дією водню руйнування може відбутися і тоді, коли матеріал містить лише невелику кількість цього газу, і ніякого погіршення властивостей матеріалу в дослідах на короткочасне розтягування знайти не можна. Невеликий за розміром атом водню може проникати дуже швидко; водень концентрується в областях з великими тривісними напруженням, тобто в областях перед тріщиною. Концентрація водню може викликати великі напруження, при цьому утворення тріщин продовжуватиметься. Руйнування під дією водню носить внутрішньокристалічний характер, подібно корозії під напруженням в сталях.

Водень може робити крихким не тільки сталі, але і інші матеріали, проте цей процес часто викликається утворенням крихких частинок гідридів. Це означає, що ці матеріали мають малу в'язкість, тоді як в сталях водень служить як механізм утворення тріщини достатньої довжини для того, щоб матеріал даної в'язкості руйнувався при діючих навантаженнях.

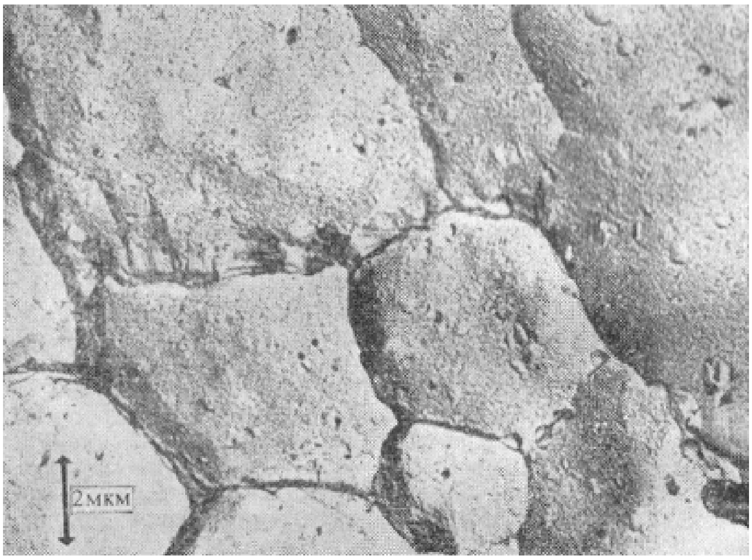


Рис. 2.32. Поверхня внутрішньокристалічного руйнування, отримана при корозії під напруженням в алюмінієвому сплаві 7079

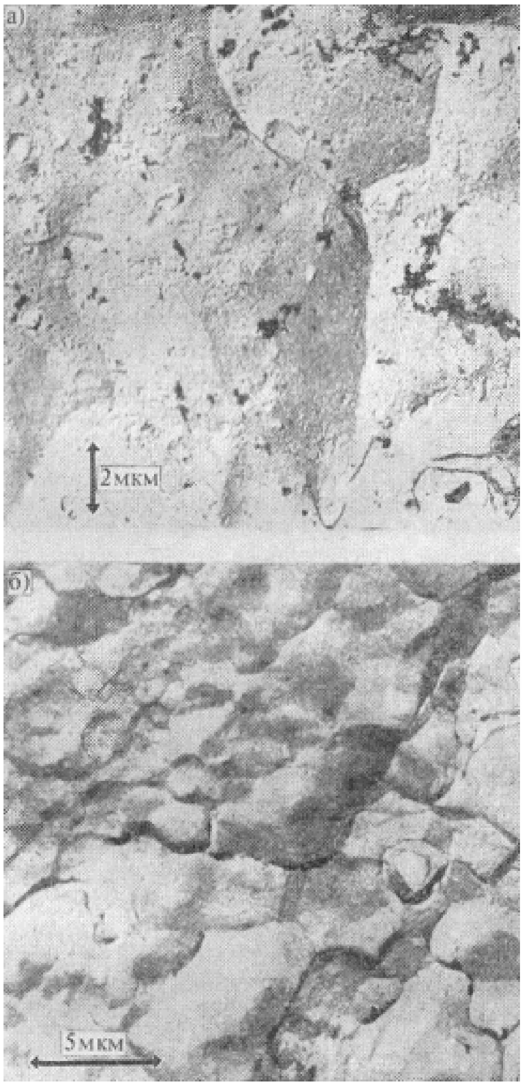


Рис. 2.33. Корозія під напруженням алюмінієвого сплаву 7075 в солоній воді (а) і у вологій атмосфері (б)

Аналіз руйнувань в умовах експлуатації

В даний час інтерес до механіки руйнування зріс унаслідок того, що до цих пір відбуваються руйнування в умовах експлуатації. Відповідне застосування висновків механіки руйнування до техніки може поліпшити положення, хоча випадки руйнування промислових об'єктів не припиняться. Велику користь приносить доскональне дослідження випадків руйнувань промислових об'єктів, яке дозволяє отримати інформацію про недоліки прикладної механіки руйнування.

Складовою частиною аналізу випадків руйнування в умовах експлуатації є електронна фрактографія. Як було показано в попередніх параграфах розділи, є ряд дуже добре помітних на фрактографіях характерних рис, дозволяючих розрізняти механізми руйнування. При аналізі випадків руйнування в умовах корисними є описання основних відмінних рис руйнування і безлічі повторних відмітних ознак руйнування. Все це дозволяє у багатьох випадках виявити механізм, за допомогою якого відбулося руйнування, хоча при цьому зустрічаються певні труднощі, оскільки при руйнуванні в умовах експлуатації рідко виходить виразна картина.

Фрактографія є лише частиною аналізу руйнування. З її допомогою можна сказати, як відбулося руйнування, але навряд чи можна визначити, чому воно відбулося. Для повного дослідження випадку руйнування в умовах експлуатації необхідний детальний аналіз проекту і деталювання незруйнованої частини конструкції, історії навантаження і навколишнього середовища. В більшості випадків в руйнуванні промислових об'єктів, як виявляється, винне неправильне проектування деталей, а також дефекти матеріалу або дефекти, що виникли при його обробці. Це означає, що аналізом випадків руйнування промислових об'єктів повинні частково займатися інженери і проектувальники.

Лекція 5 Напружений стан тіла з тріщиною

5.1 Модель тріщини

Як побудувати модель тріщини? Тріщина моделюється фронтом (вісь z) і берегами (поверхні у площині xOz) (рис.5.1). У зв'язку з малістю відстані між берегами тріщину можна розглядати як математичний розріз, тобто порожнину нульового об'єму, обмежену двома геометрично співпадаючими поверхнями – берегами розрізу.

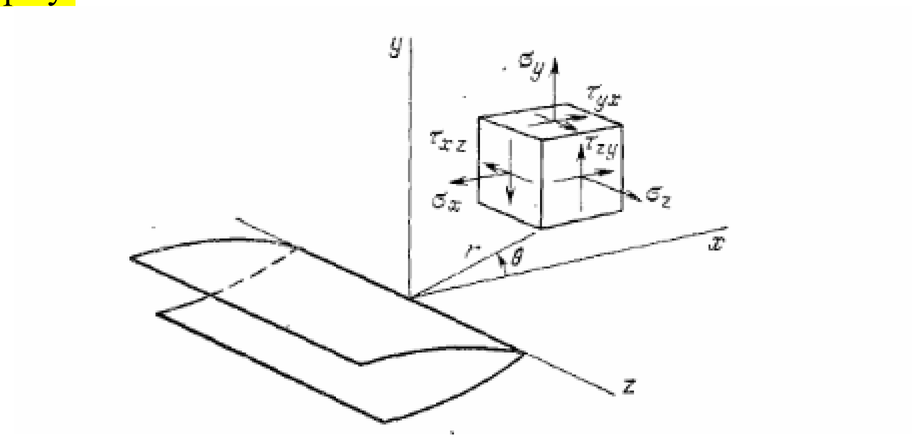


Рис.5.1

Перехід від порожнини до математичного розрізу можна реалізувати виконавши граничний перехід від порожнини у формі еліптичного циліндра з твірною, паралельною осі Z (рис. 5.1, 5.2,а). При $b \to 0$ еліптичний циліндр перетворюється у тунельний розріз на відрізку [-a, a] (рис.5.2,б).

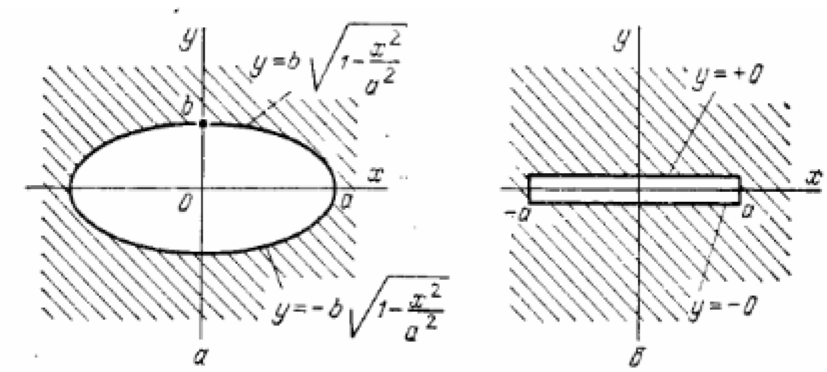


Рис. 4.2

При цьому верхня половина еліпса $y = b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ перейде у верхній берег розрізу $|x| \le a$, $y = +0$, а нижня $y = -b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ - у нижній берег розрізу $|x| \le a$, y = - 0.

Тунельний розріз у необмеженому тілі, або прямолінійний розріз по товщині тонкої пластинки є основною моделлю реальної тріщини. Таким чином вивчення тріщин можна проводити або при плоскому напруженому стані (тонка пластинка) або при плоскій деформації тунельний розріз у необмеженому об’ємі (у напрямку осі Z).

5.2 Напруження у вершині тріщини-розрізу. Коефіцієнти інтенсивності напружень

Розвиток тріщини залежить від виду напруженого стану. При нормальних напруженнях виникає тріщина типу "розрив" (рис. 5.3, а). При плоскому зсуві виникає тріщина типу "зсув" (рис. 5.3, б). При зсуві перпендикулярному площині пластини виникає антиплоский зсув (рис. 5.3, в) .

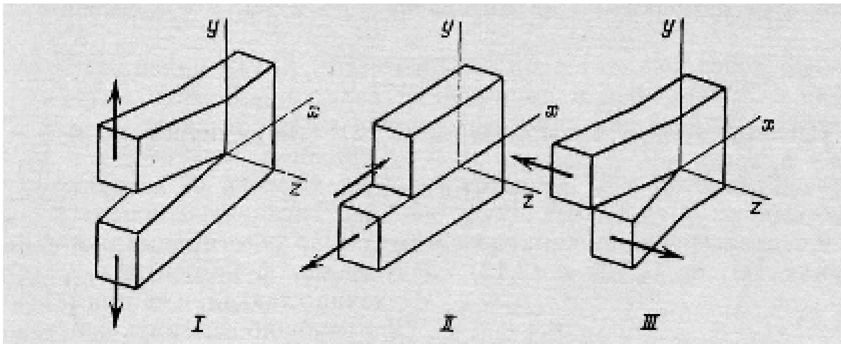


Рис.5.3

Розглянемо задачу про розподілення напружень у нескінченній пластині, яка розтягується напруженнями σ (Рис.5.4). Напруження σ виникає внаслідок дії навантаження прикладеного далеко від тріщини. Пластина має розріз довжиною $2\boldsymbol{l}$, який імітує тріщину. Якщо товщина пластини мала у порівнянні з довжиною тріщини матимемо плоский напружений стан $\sigma_z = 0$. При збільшенні товщини одержимо задачу про плоску деформацію. У цьому випадку виникають напруження $\sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$ і у точках тіла буде об’ємний напружений стан.

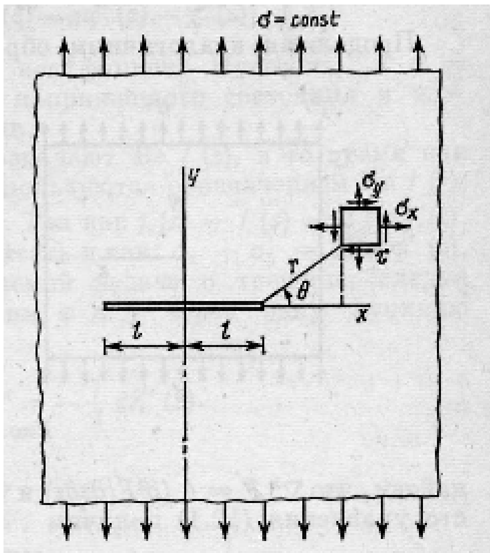


Рис. 5.4

Рівняння рівноваги для плоского напруженого стану –

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma}{\partial_y} + Y = 0\,. \tag{5.1}$$

Рівняння сумісності деформацій –

$$\nabla^2\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0\,, \tag{5.2}$$

де $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – гармонічний диференційний оператор.

Розв’язок плоскої задачі в напруженнях (три невідомі напруження) можна одержати введенням так званої функції напружень $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, за допомогою якої напруження можна записати у вигляді похідних від цієї функції.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - X \cdot y - Y \cdot x\,. \tag{5.3}$$

Складові об’ємних сил X і Y вважатимемо константами.

Можна перевірити, що при підстановці (5.3) у рівняння (5.1), ці рівняння задовольняються тотожно (тобто при довільній функції φ). Таким чином, задаючи функцію φ, можна одержувати поля напружень, що задовольняють умовам рівноваги. Ця функція була введена англійським математиком Д. Ейрі у 1862 р. і називається функцією Ейрі.

Дійсне поле напружень повинно задовольняти і рівняння сумісності деформацій (5.2). Підставляючи напруження (5.3) у рівняння (5.2), одержимо

$$\nabla^2\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=\nabla^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)=0. \qquad (5.4)$$

Це рівняння можна записати так:

$$\nabla^2\nabla^2\varphi=0, \qquad (5.5)$$

або $\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4}{\partial y^2}=0$.

Рівняння називається бігармонічним рівнянням плоскої задачі (умова сумісності деформацій, записана теж за допомогою функції Ейрі).

Таким чином плоску задачу у напруженнях зведено до одного рівняння (5.5) відносно функції φ(x,y).

Після визначення функції φ напруження обчислюються за формулами (5.3). При відсутності об’ємних навантажень формули (5.3) мають вигляд

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}. \qquad (5.6)$$

Найбільші труднощі складає вибір функції напружень, яка б задовольняла задані граничні умови. Ці умови необхідно записати також за допомогою функції напружень.

Можна показати, що у довільній точці пластини напруження у двох взаємно перпендикулярних напрямках *n* і *s* обчислюються за тими ж формулами (5.3)

$$\sigma_n=\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}; \qquad \sigma_s=\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2}; \qquad \tau_{ns}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial n}.$$

Для точок *K* контура пластини граничні умови можна записати у вигляді (рис.5.5, а)

$$\sigma_n = \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial s^2} = P_n; \qquad \tau_{ns} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial n} = -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_k = P_s.$$

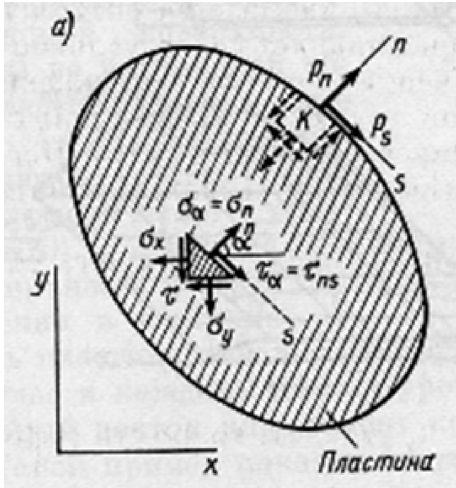


Рис. 5.5

Розв’язок окремих задач теорії пружності можна одержати знаходячи відповідний вираз для функції φ з довільними сталими, які потім знаходяться з умови виконання граничних умов.

Візьмемо, наприклад, функцію $\varphi = \frac{1}{2} C_1 y^2 + C_2 xy + \frac{1}{2} C_3 x^2$. Їй відповідатимуть напруження (застосовуємо формули (4.3) при сталих X і Y)

$$\sigma_x = \frac{\partial \varphi}{\partial y^2} = C_1; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = C_3; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -C_3. \tag{5.7}$$

Це є однорідний напружений стан, коли усі компоненти напружень – сталі. Вибрана функція відповідає розтягу пластини у двох напрямках і зсуву).

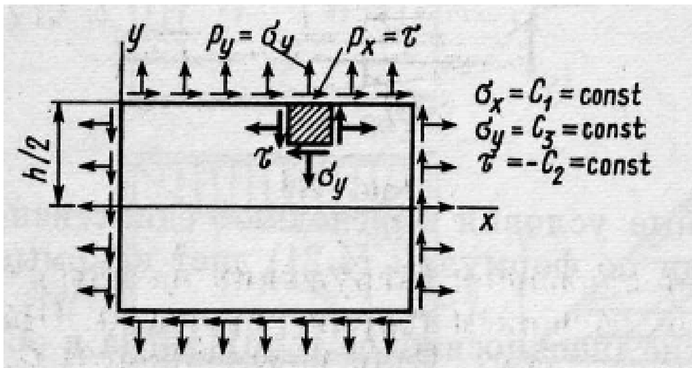


Рис 5.6

Для пластини з тріщиною (рис.5.4) напруження повинні задовольняти умови на поверхнях. У даному випадку на нескінченності (при $\boldsymbol{x} \to \infty, \boldsymbol{y} \to \infty$) напруження $\sigma_y = \sigma,\ \sigma_x = \tau_{xy} = 0$ (пластина великих розмірів), а на поверхнях ("берегах") тріщини

$$\sigma_y = 0,\ \tau_{xy} = 0,\ \text{при y=0 і } -l \le x \le l. \tag{5.8}$$

Скористаємося принципом суперпозиції (матеріал лінійно пружний) і визначимо навантаження на пластину як суму двох навантажень: на пластину без урахування тріщини і на тріщину від напружень, які виникають у точках розрізу. Ці напруження дорівнюють напруженням, що виникають у пластині без тріщини у точках розрізу, але мають протилежний знак (Рис. 5.7). Перший напружений стан буде однорідним і не потребує додаткового аналізу (у кожній точці напруження однакові), а для другого варіанту навантаження треба розв'язати відповідну задачу плоского напруженого стану, тобто підібрати функцію напружень, яка б задовольняла бігармонічне рівняння і відповідні граничні умови на берегах тріщини.

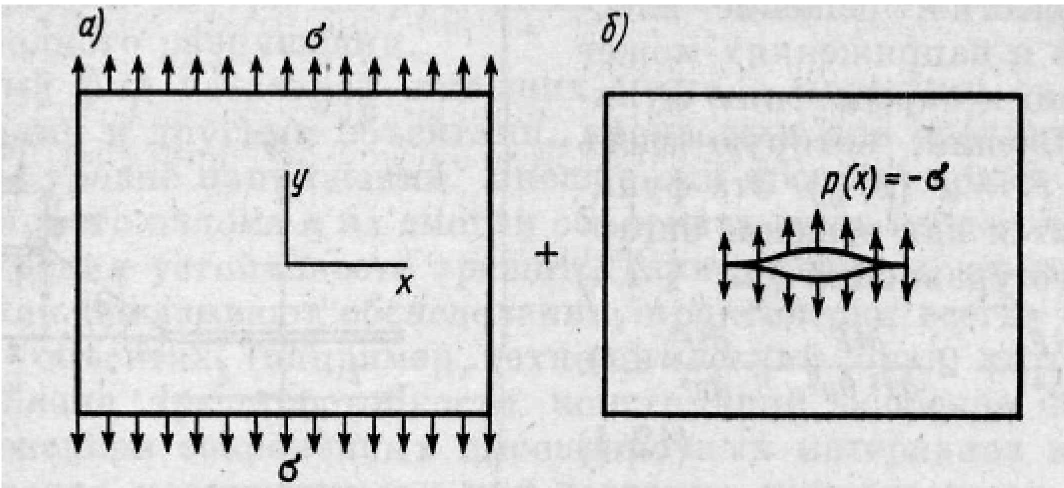


Рис.5.7

Розв'язок задачі (5.7, б) для трьох типів тріщин (рис. 5.1) було одержано у дисертації Г.В. Колосова у 1989 році і повторено Вестергардтом у 1912 році і Інглісом у 1913 році.

Асимптотичні формули* для напружень $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ і переміщень $U.V$ біля вершин тріщини для трьох типів тріщин мають вигляд

Тип I: $$\sigma_x = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)+\ldots,$$
$$\sigma_y = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)+\ldots,$$
$$\tau_{xy} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}+\ldots, \tag{5.9}$$
$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, $\sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$ - для плоскої деформації
$$U = \frac{K_1}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-2\nu+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+\ldots,$$
$$V = \frac{K_1}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2-2\nu-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)+\ldots$$

Для плоского напруженого стану $\sigma_z = 0$, а коефіцієнт Пуассона треба замінити на $\dfrac{\nu}{1-\nu}$. (G – модуль зсуву).

Тип II:
$$\sigma_x = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right)+\ldots,$$
$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}+\ldots,$$
$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)+\ldots,$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0, \tag{5.10}$$
$$\sigma_z = \nu\left(\sigma_x+\sigma_y\right),$$
$$U = \frac{K_{II}}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2-2\nu+\cos^2\frac{\theta}{2}\right)+\ldots,$$
$$V = \frac{K_{II}}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(2\nu-1+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+\ldots,$$

* Наступні доданки у цих формулах швидко зменшуються.

Формули (5.9)-(5.10) записані для плоскої деформації. Для плоского напруженого стану у формулах для переміщень величини ($(1-2\nu)$ і $(1-\nu)$ необхідно замінити на $\dfrac{1-\nu}{1+\nu}$ і $\dfrac{1}{1+\nu}$ відповідно.

Тип III:

$$\begin{aligned}
&\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0,\\
&\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2} + \ldots,\\
&\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2} + \ldots,\\
&U = V = 0,\\
&w = \frac{K_{III}}{G}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\sin\frac{\theta}{2} + \ldots
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Згідно з цими формулами, у вершині тріщини маємо сингулярність, тобто величина напружень прямує до нескінченності при $r \to 0$.

У наведені співвідношення входять величини K_{I}, K_{II}, K_{III} які називають коефіцієнтами інтенсивності напружень. Ці коефіцієнти залежать від форми, розмірів, схеми навантаження і не залежать від координат r, θ. Коефіцієнти K_I, K_{II}, K_{III} визначають масштаб поля напружень в околі точки – вершини тріщини і лінійно залежать від зовнішнього навантаження. Коефіцієнти обчислюють за формулами 5.9-5.10, розвязуючи їх відносно K_I, K_{II}.

$$K_{I,II} = \lim \sqrt{2\pi r}\,\sigma_y(r,\theta), \text{ при } \theta \to 0, r \to 0.$$

Розподілення напружень σ_y і переміщень ν у вершині тріщини згідно з формулами (5.9) наведено на рис 5.8.

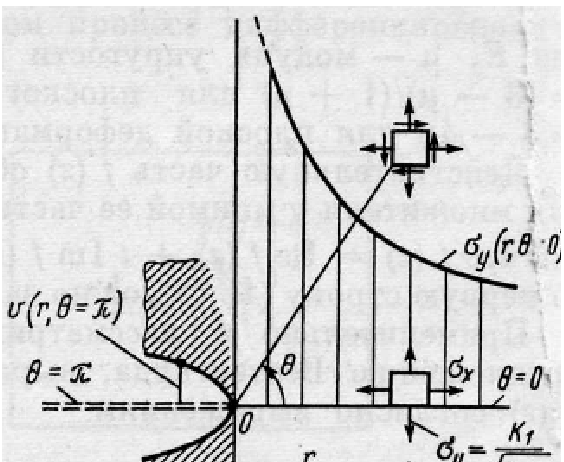


Рис.5.8

Як видно форма тріщини ставиться еліпсоподібною. На лінії, що продовжує тріщину (вісь x) напружений стан для тонкої і товстої пластин суттєво відрізняється один від одного. Для плоскої деформації (товста пластина) він буде об’ємним $\sigma_x \approx \sigma_y$. Для тонкої пластини напружений стан буде плоским $\sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \approx 2\nu\sigma_y$ (рис.5.9 а,б).

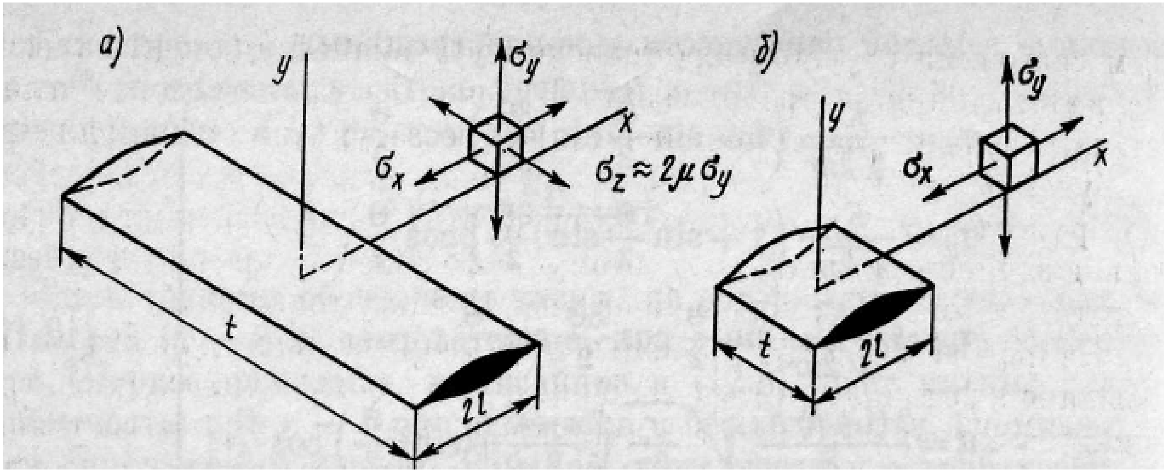


Рис.5.9

За допомогою формул (5.9-5.11) можна визначити головні напруження, максимальні дотичні напруження та інші величини, які використовуються для оцінки міцності.

Розрахунок на міцність тісно пов'язаний з визначенням напруженого стану. У багатьох випадках визначення напружень у небезпечних точках зводиться до визначення коефіцієнтів концентрації напружень, оскільки у більшості випадків розвиток тріщини починається саме від концентраторів напружень. Коефіцієнт концентрації є відношенням дійсного напруження до номінального і є безрозмірним числом.

Для аналізу міцності при наявності у тілі тріщини також треба знайти напруження. Задача визначення напруженого стану біля вершини тріщини відрізняється від задач визначення концентрації тим, що розв'язок на основі фізично лінійних рівнянь теорії пружності приводить до нескінченно великих напружень і градієнтів напружень у вершині тонкого розрізу.

При цьому поняття про коефіцієнт концентрації напружень втрачає смисл і напружений стан визначається асимптотичними формулами, у яких інтенсивність розподілення напружень визначається одним множником – коефіцієнтом інтенсивності напружень *K*.

Таким чином напружений стан визначається інтенсивністю поля напружень в об'ємі, що оточує вершини тріщини, тобто фактично величиною коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН). На відміну від коефіцієнта концентрації, коефіцієнт інтенсивності напружень *K* має розмірність мПа·м$^{1/2}$ або кГс·см$^{-3/2}$ (1 кГс·см$^{-3/2}$=0,31 мПа·м$^{1/2}$).

Асимптотичні формули (5.9-5.11) для напружень у вершині розрізу приводять до нескінченно великих напружень у цій точці. Наприклад, для тріщини першого типу

$$\begin{aligned} \sigma_{x,y} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}(1 \mp \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3}{2}\theta) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \end{aligned}, \qquad (5.12)$$

при $r \to 0$, $\quad \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \to \infty$.

У дійсності, при врахуванні нелінійних залежностей між деформаціями і переміщеннями (геометрично нелінійна теорія пружності) виявляється що у вершині тріщини утворюється малий але скінченний радіус кривизни, який зростає при збільшенні навантажень і забезпечує обмежені , хоча і великі напруження. При наявності такого радіуса кривизни ρ у кінці розрізу напруження обчислюються за такими формулами [4]:

для тріщин першого типу

$$\begin{aligned} \sigma_{x,y} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}(\cos\frac{\theta}{2}(1 \mp \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}) \mp \frac{\rho}{2r}\cos\frac{3\theta}{2}); \\ \tau_{xy} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} - \frac{\rho}{2r}\sin\frac{3\theta}{2}); \end{aligned} \qquad (5.13)$$

для тріщин другого типу

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_{11}}{\sqrt{2\pi r}}(-\sin\frac{\theta}{2}(2 + \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}) + \frac{\rho}{2r}\sin\frac{3\theta}{2}); \\ \sigma_y &= \frac{K_{11}}{\sqrt{2\pi r}}(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} - \frac{\rho}{2r}\sin\frac{3\theta}{2}); \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{11}}{\sqrt{2\pi r}}(\cos\frac{\theta}{2}(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}) - \frac{\rho}{2r}\cos\frac{3\theta}{2}); \end{aligned} \qquad (5.14)$$

для тріщин третього типу

$$\tau_{xy} = -\frac{K_{111}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}; \; \tau_{yz} = -\frac{K_{111}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}. \qquad (5.15)$$

Для тріщин третього типу початковий радіус кривизни не впливає на напружений стан.

Для тріщин першого типу на самому кінці розрізу при $\theta = 0$ *і* $r = \rho/2$ буде одновісний розтяг напруженням σ_y:

$$\sigma_x = \tau_{xy} = 0; \ \sigma_y = 2K_1 / \sqrt{\pi\rho}. \qquad (5.16)$$

Для великих значень r $(r \gg \rho)$ з наведених формул (5.13-5.15) виходять записані вище асимптотичні формули (5.9)-(5.11)

Таким чином у ідеально пружному тілі з тріщиною можна виділити три області (рис.5.10):

1 – звичайний рзв’язок теорії пружності;

2 – асимптотичний розв’язок;

3 – точний розв’язок.

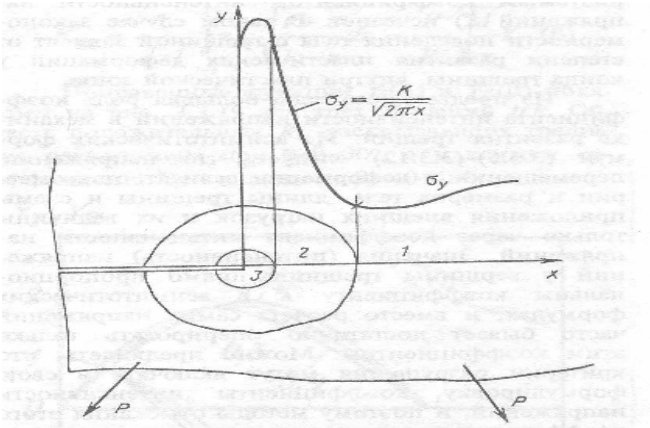


Рис. 5.10

У дійсності у кінці розрізу виникає зона пластичних деформацій різних форм і розмірів у залежності від матеріалу і умов навантаження. Закономірності поведінки тіла з тріщиною залежать від розвитку пластичної зони біля вершини тріщини. З наведених формул видно, що параметри напружено-деформівного стану залежать від геометричних розмірів тіла, довжини тріщини, зовнішніх навантажень тільки через коефіцієнт інтенсивності напружень Значення напружень біля вершини тріщини прямо пропорційне коефіцієнту інтенсивності і тому замість визначення напружень часто достатньо оперувати коефіцієнтом *K*. Саме тому задача визначення коефіцієнта інтенсивності напружень є дуже важливою задачею механіки руйнування.

Необхідно підкреслити принципову відмінність між коефіцієнтом інтенсивності і коефіцієнтом концентрації напружень. Коефіцієнт концентрації визначається як відношення $\frac{\sigma_{\mathbf{max}}}{\sigma_{ном}}$ і розраховується при скінченному значенні радіуса кривизни ρ у вершині концентратора. При зменшенні радіуса кривизни σ_{max} зростає і при $\rho \to 0$ напруження прямує до напруження у вершині тріщини. Таким чином можливим є граничний перехід, який встановлює залежність між коефіцієнтами концентрації і інтенсивності напружень. Якщо є концентратор радіусом ρ,то максимальне напруження можна визначити через кефіцієнт концентрації α_σ

$$\sigma_{\max} = \alpha_\sigma \sigma_{ном}.$$

Зі зменшенням радіуса ρ концентратор переходить у тріщиноподібний дефект і $\sigma_{\max}$ прямує до значень, які визначаються асимптотичними формулами.

Так, для тріщини першого типу (тріщина відриву) коефіцієнт K_I визначається за формулою (5.16)

$$K_I = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{2}\sqrt{\pi\rho}\,\sigma_{y\max} = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{2}\sqrt{\pi\rho}\,\alpha_\sigma \sigma_{\text{ном}}. \tag{5.17}$$

Наприклад, про розтягу пластини з еліптичним отвором коефіцієнт концентрації

$$\alpha_\sigma = 1 + 2\sqrt{l/2\rho}\ , \tag{5.18}$$

де l – більша вісь еліпса.

Підставляючи α_σ у формулу для K_I, одержимо вираз для коефіцієнта концентрації пластини з тріщиною

$$K_I = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{2}\sqrt{\pi\rho}\left(1 + 2\sqrt{\frac{l}{2\rho}}\right)\sigma = \sigma\sqrt{\pi l}. \tag{5.19}$$

Таким чином, маючи формули залежності коефіцієнта концентрації від параметрів концентратора, зокрема від радіуса кривизни у вершині концентратора, можна одержати K_I. При наявності аналітичних розв'язків для коефіцієнта концентрації напружень за допомогою такого граничного переходу можна визначати коефіцієнт інтенсивності для відповідного типу тріщини.

5.3 Розрахунок коефіцієнта інтенсивності методами теорії пружності

Визначення КІН методами теорії пружності у більшості випадків є дуже складною задачею. Для плоскої задачі використовуються методи теорії функції комплексної змінної. Зокрема, для одиночної тріщини у пластині при дії сил P_y, P_x (рис. 5.11)

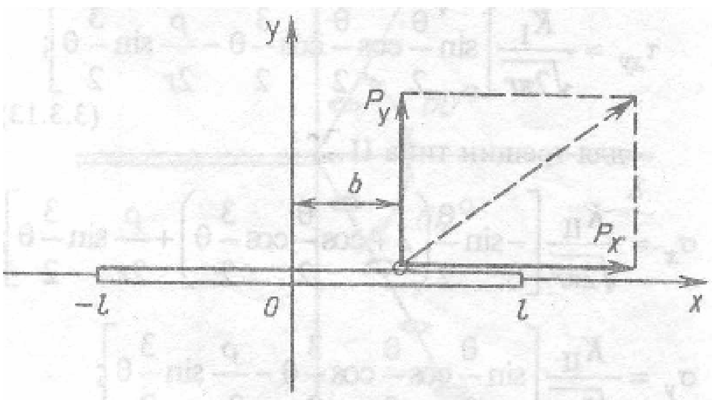


Рис.5.11

одержано формули (5.20)

$$K_I = \frac{P_y}{2\sqrt{\pi l}}\sqrt{\frac{l+x}{l-x}} + \frac{P_x}{2\sqrt{\pi l}}\frac{\mu-1}{\mu+1},\ K_{II} = \frac{P_y}{2\sqrt{\pi l}}\frac{\mu-1}{\mu+1} + \frac{P_x}{2\sqrt{\pi l}}\sqrt{\frac{l+x}{l-x}}\ , \quad (5.20)$$

де $\mu = 3-4\nu$ –для плоскої деформації ($\varepsilon_z = 0$); $\mu = (3-\nu)(1+\nu)$ – для плоского напруженого стану ($\sigma_z = 0$).

Використовуючи принцип суперпозиції, формули (5.20) можна застосувати у задачі навантаження берегів тріщини довільно розподіленими навантаженнями $P_y = \sigma_y dx, P_x = \tau_{xy} dx$ на відстані $b = x$ від середини тріщини.

Записуючи формули (5.20) окремо для сил P_y і P_x, одержимо (з урахуванням, що сили $P_y = \sigma_y dx, P_x = \tau_{xy} dx$ розподілені на обох берегах тріщини, множник 2 у формулах (5.20) скорочується)

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi\rho}}\int_{-l}^{l}\sigma_y(x)\sqrt{\frac{l+x}{l-x}}dx \quad . \quad (5.21)$$

$$K_{II} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}}\int_{-l}^{l}\tau_{xy}(x)\sqrt{\frac{l+x}{l-x}}dx$$

За допомогою формул (5.21) можна обчислювати коефіцієнти інтенсивності, якщо відомо напруження σ_y, τ_{xy}, що діють на береги тріщини. Очевидно, ці напруження можна визначити для деталей без тріщини у тих точках, де вона повинна бути. Звідси випливає методика визначення коефіцієнтів інтенсивності для різних тріщин. Для цього треба визначити напруження на лінії дії майбутньої (можливої) тріщини, після чого прикласти ці напруження до берегів тріщини і визначити коефіцієнти K_I, K_{II} за формулами (5.21).

Визначимо коефіцієнти інтенсивності для тріщини у диску товщиною t і радіусом R, який стискається силами P (рис.5.12). Тріщина довжиною $2l$ направлена під кутом β до вертикальної осі.

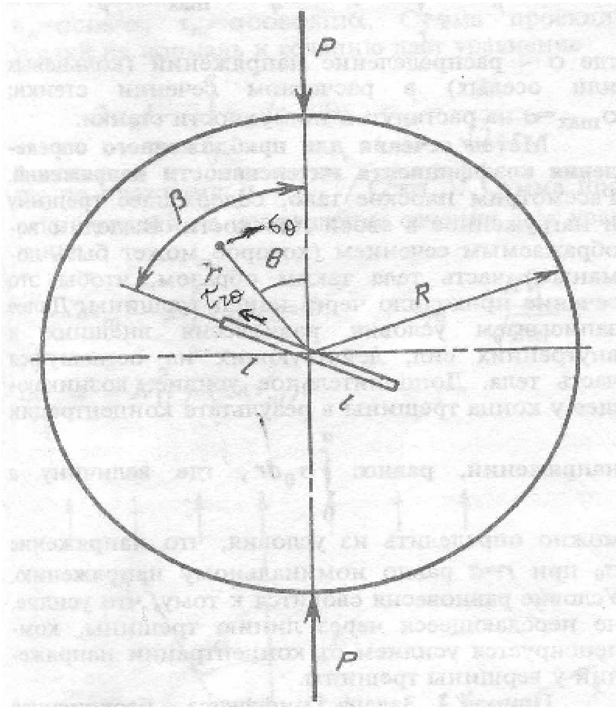


Рис.5.12

Розв'язок задачі теорії пружності для диска без тріщини має вигляд [4]

$$\sigma_\theta = \frac{P}{\pi R t} - \frac{2P}{\pi t}((R - r\cos\theta)(\frac{R\sin\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta})^2 + (R + r\cos\theta)(\frac{R\sin\theta}{R^2 + r^2 + 2Rr\cos\theta})^2), \tag{5.11}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{2PR\sin\theta}{\pi t}(\frac{(R - r\cos\theta)(R\cos\theta - r)}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta)^2} + \frac{(R + r\cos\theta)(R\cos\theta + r)}{(R^2 + r^2 + 2Rr\cos\theta)^2}).$$

Підставляючи ці напруження при $\theta=\beta$ у формули (5.10), одержимо коефіцієнти інтенсивності напружень I і II типів

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^{l} \sigma_\theta \sqrt{\frac{l + r}{l - r}} dr = \frac{P}{Rt} \sqrt{\frac{l}{\pi}} Y_I(\beta)$$

$$K_{II} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^{l} \tau_{r\theta} \sqrt{\frac{l + r}{l - r}} = \frac{P}{Rt} \sqrt{\frac{l}{\pi}} Y_{II}(\beta) \tag{5.12}$$

Функції $Y_1(\beta), Y_2(\beta)$ називають тарировочними функціями. Ці функції враховують конкретну форму тіла з тріщиною. Графіки тарировочних функцій для цього випадку наведено на рис 5.4.

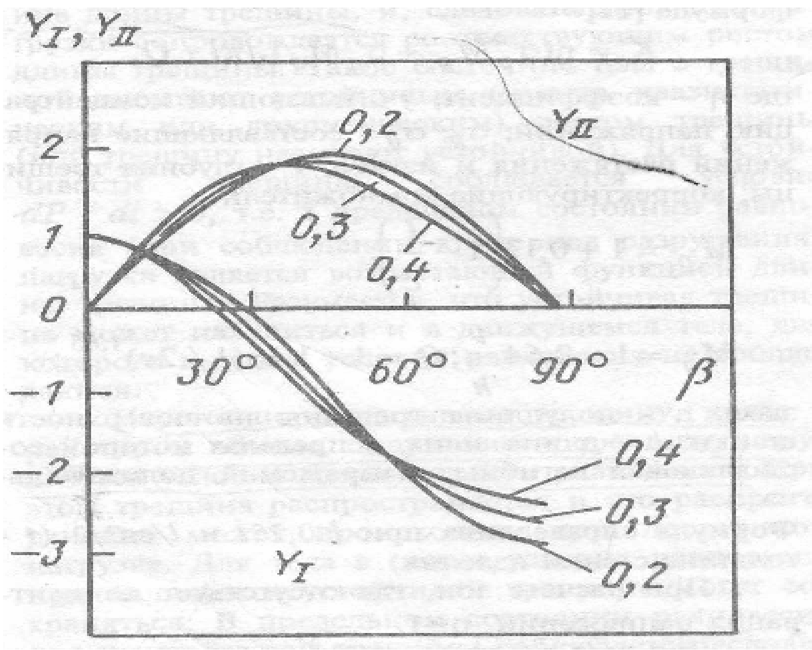


Рис.5.13

Область додатних значень функції $Y_I(\beta)$ ($K_I > 0$ означає розкриття тріщини розриву) лежить у діапазоні $0 < \beta < 30^\circ$, а максимум коефіцієнта K_{II} (тріщина зсуву) – у діапазоні $\beta = 40^\circ \div 45^\circ$. Цей прийом введення тарировочних функцій широко використовується у формулах коефіцієнта інтенсивності для деталей різної форми. При цьому формулу для *K* записують у вигляді

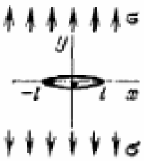
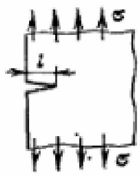
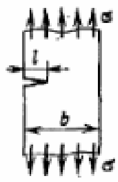
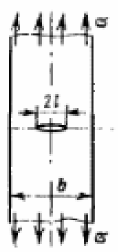
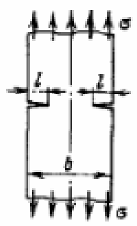
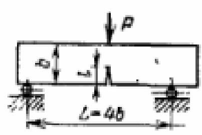
$$K = \sigma\sqrt{\pi l}Y(l), \tag{5.13}$$

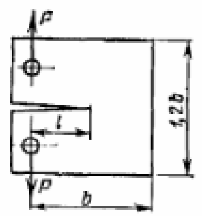
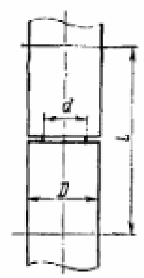
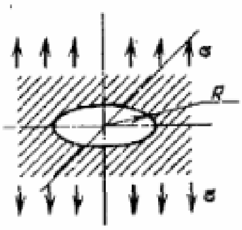
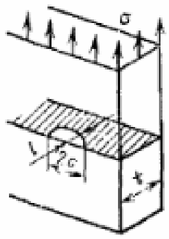
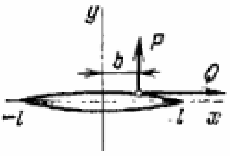
де множник $\sigma\sqrt{\pi l}$ є коефіцієнтом інтенсивності напружень для розтянутої пластини з одиночною тріщиною довжиною *2l*. Наприклад, для задачі розтягу пластини шириною 2*b* з центральною тріщиною довжиною **2*l*** поправочний коефіцієнт записують у вигляді [4]

$$Y\left(l\right) = \sqrt{\frac{2b}{\pi l} tg \frac{\pi l}{2b}}, \text{ (Ірвін, 1958 р.)} \quad Y\left(l\right) = \sqrt{\sec\frac{\pi l}{2b}} \text{ (Федерсен,1966 р.)} \tag{5.14}$$

У наведеній нижче таблиці подано коефіцієнти інтенсивності для деяких об'єктів з тріщинами. Повні таблиці значень коефіцієнтів інтенсивності наведені у довіднику [2].

Таблиця 5.1 Коефіцієнти інтенсивності напружень

№ п/п	Форма образца и схема нагружения	Формула для K
1		$K = \sigma\sqrt{\pi l}$
2		$K = 1{,}12\sigma\sqrt{\pi l}$
3		$K = \sigma\sqrt{l}\,Y,\quad Y = (1{,}99 - 0{,}41\lambda + 18{,}70\lambda^2 - 38{,}48\lambda^3 + 53{,}85\lambda^4)$ $(\lambda = l/b,\ \lambda \leqslant 0{,}7)$
4		$K = \sigma\sqrt{\pi l}\,Y,\quad Y = \sqrt{\frac{1}{\pi\lambda}\operatorname{tg}\pi\lambda}\quad (\lambda \leqslant 0{,}7),$ $Y = (1{,}77 + 0{,}454\lambda - 2{,}04\lambda^2 + 21{,}6\lambda^3)/\sqrt{\pi}\quad (\lambda < 1),$ $Y = \sqrt{\sec\pi\lambda}\quad (\lambda \leqslant 0{,}8)$
5		$K = \sigma\sqrt{l}\,Y,\quad Y = 1{,}98 + 0{,}72\lambda - 8{,}48\lambda^2 + 27{,}36\lambda^3,$ $Y = \sqrt{\frac{1}{\pi\lambda}(\operatorname{tg}\pi\lambda + 0{,}1\sin\pi\lambda)}$
6		$K = \frac{P}{t\sqrt{b}}Y,\quad Y = 6\sqrt{\lambda}\,(1{,}93 - 3{,}07\lambda + 14{,}53\lambda^2 - 25{,}1\lambda^3 + 25{,}8\lambda^4)$

№ п/п	Форма образца и схема нагружения	Формула для K
7		$K=\frac{P}{t\sqrt{b}}Y,\quad Y=\sqrt{\lambda}\,(29{,}6-185\lambda+655\lambda^2-1017\lambda^3+639\lambda^4)$
8		Растяжение $K=\frac{P}{D\sqrt{d}}Y_p,\quad Y_p=\frac{1}{d}\sqrt{\frac{D}{\pi d}}$ Изгиб $K=\frac{6M\sqrt{\lambda}}{D^2\sqrt{D}}Y_u,\quad Y_u=2{,}45-3{,}28\lambda+5{,}55\lambda^2\left(\lambda=1-\frac{d}{D},\quad 0{,}2\leqslant\lambda\leqslant 0{,}8\right)$ Кручение $K=\frac{6M}{D^2\sqrt{2\pi D}}Y_к,\quad Y_к=\frac{\sqrt{\lambda}}{(1-\lambda)^{5/2}}(0{,}375+0{,}75\lambda-0{,}125\lambda^2)$
9		$K=2\sigma\sqrt{\frac{R}{\pi}}$
10		$K=1{,}1\sigma\sqrt{\frac{\pi l}{Q}},\quad Q=E^2(k)-0{,}212\left(\frac{\sigma}{\sigma_т}\right)^2,$ $E(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi\quad\left(k^2=1-\frac{l^2}{c^2}\right)$ Q см. рис. 15.13; $Q\approx 1+1{,}46(l/c)^{1{,}65}$. $K=\sigma\sqrt{\pi l}\,Y,\quad Y=\frac{1{,}12-0{,}48\frac{l}{c}}{1-\frac{l}{t}\left(1-0{,}75\frac{l}{t}\right)}$ $\left(0<\frac{l}{c}<1,\quad 0<\frac{l}{t}\leqslant 0{,}4\right),$ $Y=\frac{1}{E(k)}\left[1+0{,}12\left(1-\frac{l}{c}\right)\right]\sqrt{\frac{2t}{\pi l}\operatorname{tg}\frac{\pi l}{2t}}$
11		$K_{I}=\frac{P}{2\sqrt{\pi l}}\sqrt{\frac{l+b}{l-b}}+\frac{Q}{2\sqrt{\pi l}}\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}$ $K_{II}=-\frac{P}{2\sqrt{\pi l}}\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}+\frac{Q}{2\sqrt{\pi l}}\sqrt{\frac{l+b}{l-b}}$

5.4 Метод перерізів для наближеного визначення коефіцієнта інтенсивності напружень

Визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень для тіл довільної конфігурації є дуже складною задачею. У зв'язку з цим корисними можуть бути наближені методи, зокрема відомий з курсу «Опір матеріалів» метод перерізів.

Розглянемо пластину з тріщиною, навантажену напруженнями $\boldsymbol{\sigma}$, перпендикулярними до тріщини (задача Гріфітса) (рис. 5.14). Виділимо умовним перерізом (яке може бути і ламаним) частину пластини так, щоб переріз проходив через тріщину. Далі записуємо умови рівноваги внутрішніх і зовнішніх сил, діючих на верхню частину пластини розрізаної по тріщині і осі x (у даному випадку тріщина лежить на осі x). Додаткове зусилля, яке виникає на кожному з країв тріщини у результаті концентрації напружень дорівнює

$$R = \int_0^a \sigma_\theta dr,$$

Де σ_θ – напруження біля вершини тріщини на відрізку $0 - a$ від вершини тріщини. Умова рівноваги полягає у тому, що напруження, яке не передається через лінію тріщини, компенсується напруженнями від концентрації на відрізку $0 - a$.

Силу, яка не передається через тріщину оскільки береги тріщини не з'єднані, можна записати як $2\sigma l$ ($2l$ – довжина тріщини).

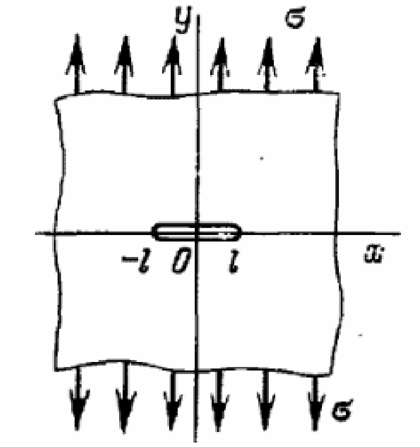


Рис.5.14

Величину a можна визначити з умови, що при $r = a$ напруження σ_θ дорівнює номінальному (тобто напруженню у перерізі без врахування концентрації, тобто σ_θ при $r=a$ дорівнює напруженню $\boldsymbol{\sigma}$,

$$K / \sqrt{2\pi a} = \sigma, \text{ звідки } a = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K}{\sigma}\right)^2.$$

Умова рівноваги сил

$$2\sigma l - 2\int_{0}^{a} \sigma_\theta dr\,.$$

Підставляючи напруження $\sigma_\theta = \dfrac{K}{\sqrt{2\pi r}}$ у це рівняння, після інтегрування знаходимо коефіцієнт інтенсивності напружень.

$$K = \sigma\sqrt{\pi l}\,.$$

Цей результат є точним.

Розглянемо випадок коли тріщина у пластині розміщується під кутом $90 - \alpha$ до напрямку дії напружень (рис 5.15).

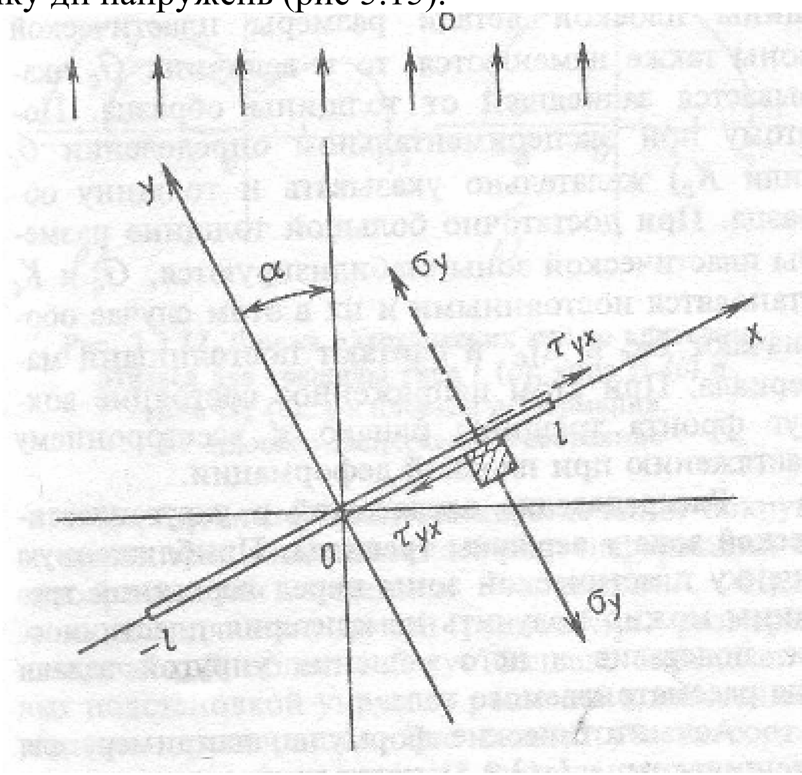


Рис.5.15

У зв’язку з нахилом тріщини на кінцях тріщини виникають нормальні і дотичні напруження. У цьому випадку для характеристики напруженого стану у вершині тріщини необхідно ввести два коефіцієнти K_I і K_{II} .

Проведемо переріз по лінії тріщини . Напруження, що діють у перерізі під кутом α до напрямку розтягу,

$$\sigma_n = \sigma\cos^2\alpha, \quad \tau_{nt} = \sigma\cos\alpha\sin\alpha\,.$$

Сума проекцій зусиль на нормаль до перерізу приводить до рівняння

$$2\sigma_n l - 2\int_0^a \sigma_\theta dr = 0; \qquad \sigma_\theta = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}},$$

де як і у попередному прикладі $a = \dfrac{K_1^2}{2\pi\sigma_n^2}$.

Складемо суму проекцій на напрям перерізу

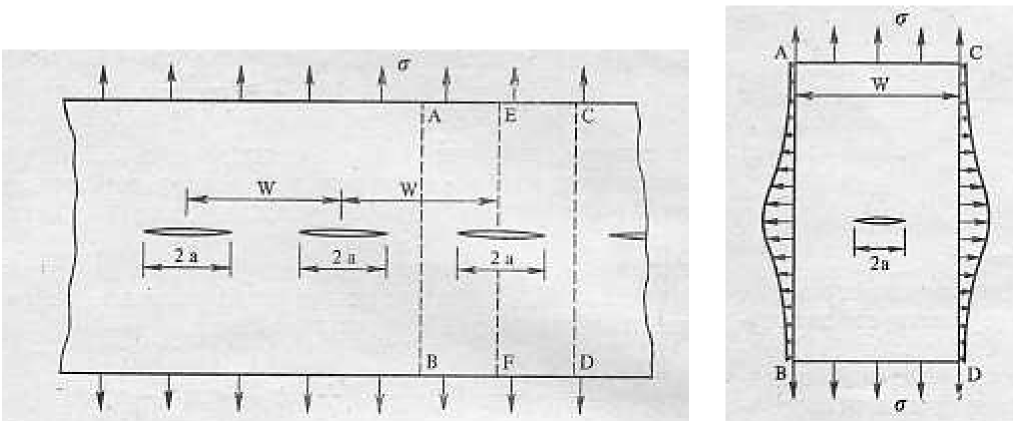
$$2\tau_{nt} l - 2\int_0^{a'} \tau_{r\theta} dr = 0;\quad \tau_{r\theta} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}},\ \text{де}\quad a' = \frac{K_{II}^2}{2\pi\tau_{nt}^2}.$$

З першого рівняння рівноваги – $K_I = \sigma\cos^2\alpha\sqrt{\pi l}$, з другого – $K_{II} = \sigma\cos\alpha\sin\alpha\sqrt{\pi l}$. Цей результат співпадає з одержаним вище для диска при $\dfrac{l}{R} \to 0$, $90\text{-}\alpha = \beta$ і $\sigma = \dfrac{P}{Rt}$.

5.5 Залежність коефіцієнта K_1 від розмірів деталі

Розглянуті вище розв’язки задач про напруження в околі тріщини одержані для елементів нескінченних розмірів, що дозволило відволіктись від врахування граничних умов. Для елементів скінченних розмірів аналітичні розв’язки одержати дуже важко, у зв’язку з чим існуючі результати одержані наближеними методами або чисельним розрахунком.

Наближений розв’язок можна одержати для полоси скінченної ширини з крайовою або центральною тріщиною. Скористаємося для цього результатом розрахунку коефіцієнта інтенсивності напружень для нескінченної пластини з паралельними тріщинами, одержаним Вестергардтом (1939р.) (Рис.5.16).



а б

Рис.5.16

Формула Вестергардта для K_I для полоси з паралельними тріщинами (рис 5.16,а) має вигляд

$$K_1 = \sigma\sqrt{\pi a}\left(\frac{W}{\pi a} tg \frac{\pi a}{W}\right)^{1/2}, \qquad (5.17)$$

де $2a$ – довжина тріщини, W – відстань між центрами паралельних тріщин, σ – напруження на торцях пластини.

Полосу скінченої ширини $\boldsymbol{W}$ з центральною тріщиною $2\boldsymbol{a}$ одержимо розрізавши пластину по лініях AB і CD. Можна припустити, що формулу (5.17) можна використати і для полоси ABDC. По лініях AB і CD у складі нескінченної пластини діють напруження, у горизонтальному напрямку, паралельному тріщині. Можна вважати, що ці напруження не впливають на коефіцієнт K_I.

При зменшенні відношення $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{W}}$ значення $\boldsymbol{K_I}$ наближається до $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$, тобто полоса ABDC наближатиметься до нескінченної пластини.

Для визначення коефіцієнта інтенсивності напружень у розглянутій полосі більш точною виявляється формула Исіди-Феддерсена

$$K_1 = \sigma\sqrt{\pi a}\sqrt{\sec \pi a/W}\ . \qquad (5.18)$$

Оскільки рівняння, які описують поля напружень біля тріщин типу I, мають однаковий вид, коефіцієнт інтенсивності напружень для декількох навантажень можна одержати додаванням коефіцієнтів, одержаних для кожного навантаження.

$$K_I = K_{Ia} + K_{Ib} + K_C + \ldots$$

Це справедливо і для тріщин типу II і III. Для тріщин змішаного типу така суперпозиція неприйнятна. Принцип суперпозиції можна використати для визначення коефіцієнтів інтенсивності, зокрема у випадку визначення $\boldsymbol{K}$ для тріщини під дією внутрішнього тиску на її поверхні (рис.5.17). Варіанти *а* і *б* є еквівалентними, у той же час можна варіант *б* сумою варіантів *в* і г, тобто

$K_{Iв} + K_{Iг} = K_{Iб} = K_{Ia} = 0$, звідки $K_{Iг} = -K_{1в}$.

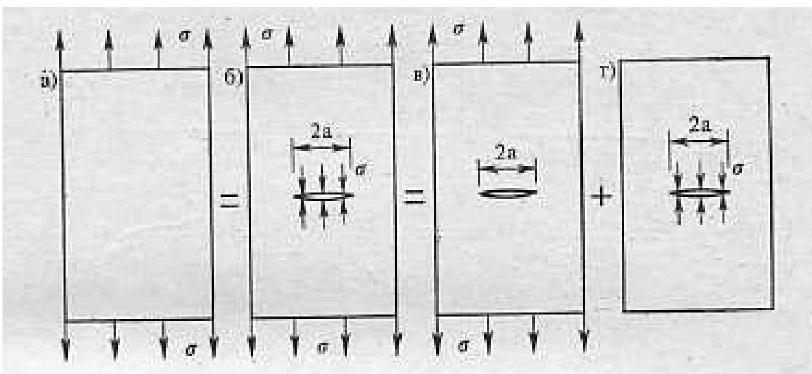


Рис.5.17

Випадок тріщини під внутрішнім тиском p є еквівалентним варіанту (рис.5.17,г) при напруженнях, діючих у протилежному напрямку. Тому у цьому випадку знак $K_{I г}$ змінюється на протилежний, тобто

У результаті одержимо (при $K_{I в} = \sigma\sqrt{\pi a}$)

$$\boldsymbol{K_{I г} = -\sigma\sqrt{\pi a} = p\sqrt{\pi a}}\ , \qquad (\ p = -\sigma - \text{тиск на береги тріщини}).$$

Розглянемо випадок навантаження пластини скінченної ширини напруженнями $\boldsymbol{\sigma}$ (рис.5.18) за допомогою методу перерізів.

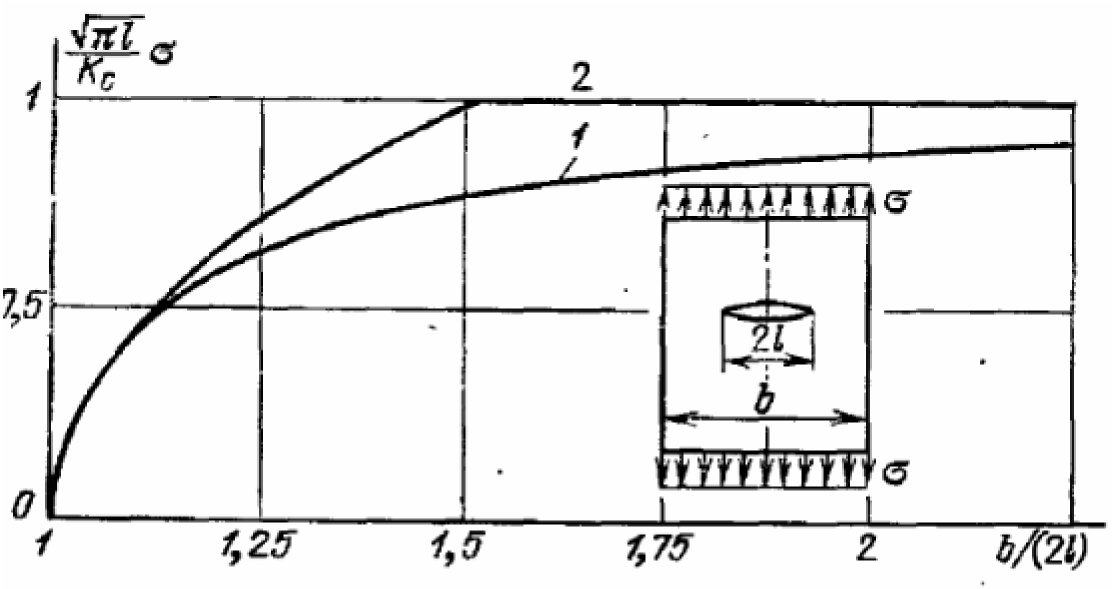


Рис.5.18

Для нескінченної пластини розмір збуреної зони перед вершиною тріщини дорівнює $a = l/2$. Таким чином, якщо ширина пластини $b \geq 2l + 2a = 3l$, то вона уже не впливає на коефіцієнт інтенсивності, який буде дорівнювати, згідно з попереднім прикладом, $K = \sigma\sqrt{\pi l}$. Якщо ж $b < 3l$, то величина a буде дорівнювати $\dfrac{b-2l}{2}$. Застосовуючи метод перерізів, з умови рівноваги половини пластини $2\sigma l - 2\int\limits_0^a \sigma_\theta dr$, де $a = \dfrac{b-2l}{2}$,

знаходимо коефіцієнт інтенсивності

$$K = \sigma\sqrt{\pi l}\sqrt{\frac{l}{b-2l}}.$$

Формула Ірвіна, що враховує скінченний розмір пластини по ширині, має вигляд

$$K = \sigma \sqrt{\pi l} \sqrt{\frac{b}{\pi l} \operatorname{tg} \frac{\pi l}{b}}.$$

Ці дві залежності наведено на рис.5.18, з якого видно, що наближений метод (крива 2) дає завищений результат порівняно з формулою Ірвіна (крива 1).

Для визначення коефіцієнта інтенсивності напружень у більш складних випадках об'ємних тіл використовують або наближені формули, або чисельні розв'язки з використанням методу скінченних елементів. Якщо відомо коефіцієнт інтенсивності, можна визначити напруження в околі вершини тріщини зокрема головні напруження, за відомими залежностями для тріщини у нескінченній пластині.

5.6 Висновки

1. Тріщину можна розглядати як математичний розріз, тобто порожнину нульового об'єму, обмежену двома геометрично співпадаючими поверхнями – берегами розрізу.

2. Перехід від порожнини до математичного розрізу можна реалізувати виконавши граничний перехід від порожнини у формі еліптичного циліндра до тунельного розрізу зі співпадаючими поверхнями.

3. Вивчення тріщин можна проводити або при плоскому напруженому стані (тонка пластинка) або при плоскій деформації тунельний розріз у необмеженому об'ємі (у напрямку осі Z).

4. Розвиток тріщини залежить від виду напруженого стану. При нормальних напруженнях виникає тріщина типу "розрив" . При плоскому зсуві виникає тріщина типу "зсув" (рис.5.1) . При зсуві, перпендикулярному площині пластини, виникає антиплоский зсув.

5. Асимптотичні формули для напружень $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ і переміщень $U.V$ біля вершин тріщини визначаються за асимптотичними формулами (5.9)-(5.11):

У ці формули входять величини K_I, K_{II}, K_{III}, які називають коефіцієнтами інтенсивності напружень.

6. Згідно з цими формулами, у вершині тріщини маємо сингулярність, тобто величина напружень прямує до нескінченності (Рис.5.8)

9. Згідно з цими формулами можна вважати, що поле напружень біля вершин тріщини визначається коефіцієнтами інтенсивності напружень, тобто K_I, K_{II}, K_{III} є критеріями, за якими можна визначити початок розвитку тріщини.

10. Коефіцієнт K_I, K_{II} залежать від розподілення напружень $p(x)$ діючих на береги тріщини і визначаються формулами (5.21)

У частинному випадку, при $p = \sigma = \text{const}$, матимемо

$$K_1 = \sigma\sqrt{\pi l}\,.$$

(l – половина довжини тріщини по осі x).

11. Форма тріщини вважається еліпсоподібною. На лінії, що продовжує тріщину (вісь x) напружений стан для тонкої і товстої пластин суттєво відрізняється один від одного. Для плоскої деформації (товста пластина) він буде об’ємним $\sigma_x \approx \sigma_y$, . Для тонкої пластини напружений стан буде плоским

$\sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \approx 2\nu\sigma_y$.

12. Коефіцієнт концентрації є відношенням дійсного напруження до номінального і є безрозмірним числом.

13. Напружений стан при наявності тріщини визначається інтенсивністю поля напружень в об'ємі, що оточує вершини тріщини. На відміну від коефіцієнта концентрації, коефіцієнт інтенсивності напружень K має розмірність мПа·м$^{1/2}$ або кГс·см$^{-3/2}$ (1 кГс·см$^{-3/2}$=0,31 мПа·м$^{1/2}$).

14. Маючи формули залежності коефіцієнта концентрації від параметрів концентратора, зокрема від радіуса кривизни у вершині концентратора, можна одержати K_I (при наявності аналітичних розв’язків для коефіцієнта концентрації напружень) за допомогою граничного переходу для відповідного типу тріщини.

15. Асимптотичні формули для напружень у вершині розрізу приводять до нескінченно великих напружень у цій точці.

У дійсності, при врахуванні нелінійних залежностей між деформаціями і переміщеннями (геометрично нелінійна теорія пружності) виявляється що у вершині тріщини утворюється малий але скінченний радіус кривизни, який зростає при збільшенні навантажень і забезпечує обмежені , хоча і великі напруження. При наявності такого радіуса кривизни ρ у кінці розрізу напруження обчислюються за формулами (5.13-5.15).

16. У ідеально пружному тілі з тріщиною можна виділити три області (рис.5.1):

1 – звичайний рзв’язок теорії пружності;

2 – асимптотичний розв’язок;

3 – точний розв’язок.

17. У дійсності у кінці розрізу виникає зона пластичних деформацій різних форм і розмірів у залежності від матеріалу і умов навантаження.

18. Визначення КІН методами теорії пружності у більшості випадків є дуже складною задачею. У таблицях коефіцієнта інтенсивності для деталей різної форми формулу для *K* записують у вигляді

$$K = \sigma\sqrt{\pi l}Y(l),$$

де $Y(l)$ – так звані тарировочні функції, а множник $\sigma\sqrt{\pi l}$ є коефіцієнтом інтенсивності напружень для розтянутої пластини з одиночною тріщиною довжиною *2l*.

19. У деяких випадках для визначення коефіцієнта інтенсивності можна використати метод перерізів. У більшості ж випадків єдиним способом є використання чисельних методів (зокрема, методу скінченних елементів і методу граничних елементів).

.

20. Коефіцієнт інтенсивності напружень для декількох навантажень можна одержати додаванням коефіцієнтів, одержаних для кожного навантаження.

$$K_I = K_{Ia} + K_{Ib} + K_C + \ldots$$

Це справедливо окремо і для тріщин типу *II і III*. Для тріщин змішаного типу така суперпозиція неприйнятна.

21. Якщо відомо коефіцієнт інтенсивності, можна визначити напруження в околі вершини тріщини зокрема головні напруження, за відомими залежностями для тріщини у нескінченній пластині.

5.7 Приклади

Задача 1. Визначити головні напруження біля вершини тріщини в умовах плоскої деформації і плоского напруженого стану скориставшись асимптотичними формулами Колосова-Вестергардта.

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\left[\cos\frac{\theta}{2}(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2})\right],$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\left[\cos\frac{\theta}{2}(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2})\right],$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\left[\cos\frac{\theta}{2}(\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2})\right],$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy} = 0,$$

$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ – плоска деформація,

$\sigma_z = 0$ – плоский напружений стан.

Розв'язання

При плоскому наруженому стані $\sigma_z = 0$, а при плоскій деформації

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 2\nu \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}.$$

Головні напруження обчислюємо за формулами:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_e}{2})^2 + \tau_{xy}^2} =$$

$$= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} (1 \pm \sin\frac{\theta}{2}) \cos\frac{\theta}{2},$$

$\sigma_3 = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} 0.6 cos \dfrac{\theta}{2}$ – плоска деформація,

$\sigma_3 = 0$ – плоский напружений стан,

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|).$$

Задача 2

Визначити головні напруження і найбільші дотичні напруження у вершині тріщини *III* типу.

Асимптотичні формули для напружень:

$$\tau_{xz} = \frac{-K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}, \tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2},$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0.$$

Розв'язання

Максимальне дотичне напруження

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \text{ } при \text{ } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

Характеристичне рівняння для визначення головних напружень

$$\sigma(\sigma^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2) = 0.$$

Корені цього рівняння

$$\sigma_2 = 0, \sigma_{1,3} = \pm\sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \pm \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}.$$

Таким чином усі напруження не залежать від кута θ.

Задача 2. Визначити питому енергію деформації біля вершини тріщини *III* типу.

Розв'язання

Потенційна енергія деформації для ідеально пружного матеріалу визначається так:

$$W=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon},\quad \boldsymbol{\sigma}=[\sigma_x\sigma_y\sigma_z\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}]^T,\boldsymbol{\varepsilon}=[\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx}]^T.$$

Після підстановки значень деформацій згідно з законом Гука, одержимо

$$W=\frac{1}{4\nu}(\tau_{xz}\tau_{xz}+\tau_{yz}\tau_{yz}+\tau_{zx}\tau_{zx}+\tau_{zy}\tau_{zy}).$$

Підставляючи значення напружень з асимптотичних формул, одержимо

$$W=\frac{1}{2\nu}\left[\left(-\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2+\left(\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\right]=\frac{K_{III}^2}{4\pi\nu r}.$$

Як видно питома енергія деформації визначається коефіцієнтом інтенсивності напружень і обернено пропорційна відстані від вершини тріщини.

Задача 3.Знайти коефіцієнт інтенсивності напружень для тріщини довжиною $2l$ на рівні осі балки (5.19). Тріщина розміщується симетрично відносно осі балки. На торцях балки діють згинаючі моменти . Висота балки-пластини $h \gg 2l$, товщина – t. Навантаження прикладено на торцях балки у вигляді згинаючих моментів М.

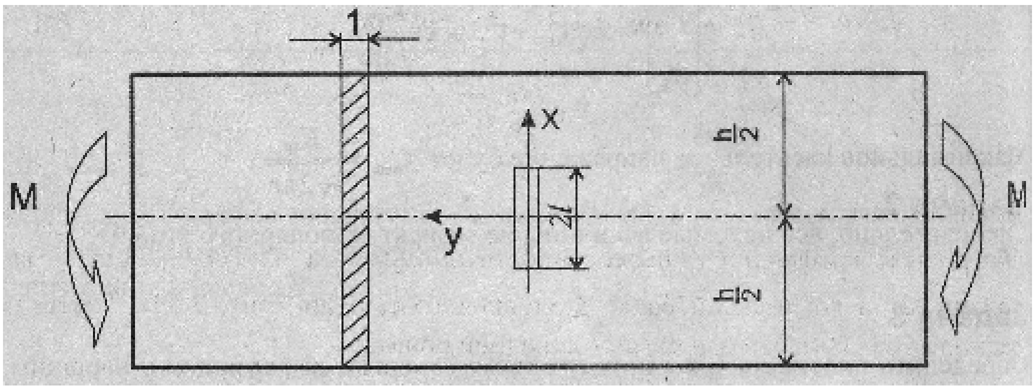


Рис. 5.19 Чистий згин балки з тріщиною

Розв'язання.

Це тріщина відриву. Введемо декартову систему координат (xOy) як показано на рисунку. Коефіцієнт K_I визначається за формулою (для тріщини типу I).

$$K_I=\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_{-a}^{a}\sigma_y(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}dx},$$

де x – відстань від точки прикладення сили $\sigma_y dx$ до точки з координатами (0, 0).

Напруження при чистому згині балки без тріщини (у поперечних перерізах – тільки моменти).

$$\sigma_y = \frac{Mx}{J_z} = 12\frac{Mx}{th^3}, \quad (J_z = \frac{th^3}{12} - \text{момент інерції площі поперечного перерізу балки})$$

Прикладемо напруження, діючі у місці розміщення тріщини, до берегів тріщини. Тоді КІН визначатиметься за формулою

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{a} 12\frac{Mx}{th^3}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx \; .$$

Після інтегрування одержимо

$$K_I = 6\frac{Ma}{th^3}\sqrt{\pi a} \; .$$

Задача 4. Визначити коефіцієнт інтенсивності напружень K_{II} для тріщини, яка знаходиься у консольній двотавровій балці (рис.5.20)

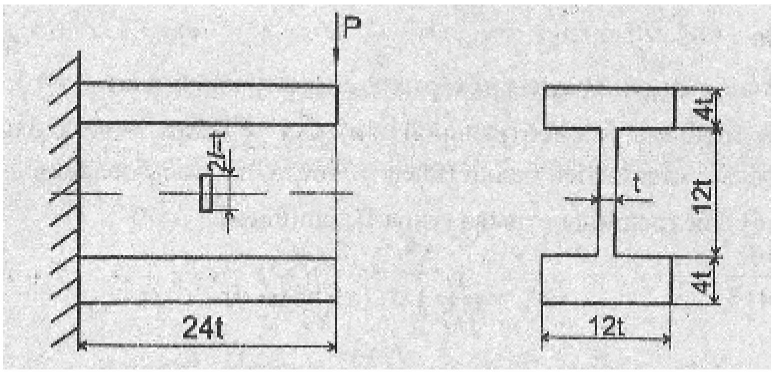


Рис.5.20 Двотаврова балка з тріщиною

Розв'язок.

У даному випадку тріщина знаходиться на нейтральній лінії, де діють максимальні дотичні напруження, а нормальні практично дорівнюють нулю. Таким чином на береги тріщини діють дотичні напруження. Кажуть, що це тріщина зсуву. Коефіцієнт інтенсивності напружень знаходиться за формулою

$$K_{II} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{a} \tau_{xy}(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx \; .$$

Дотичні напруження визначаються за формулою Журавського

$$\tau = \frac{QS}{Jt},$$

де поперечна сила $Q = P$, t – товщина стінки.

Статичний момент верхньої половини перерізу

$$S = 12t \cdot 4t \cdot 8t + 6t \cdot t \cdot 3t = 402t^{3.} \; .$$

Осьовий момент інерції

$$J = 2\{\frac{12t(4t)^3}{12} + 12t \cdot 4t(8t)^2\} + \frac{t(12t)^3}{12} = 6416t^4.$$

Дотичне напруження на рівні нейтральної осі балки

$$\tau = \frac{P \cdot 402t^3}{6416t^4 \cdot t} = \frac{402P}{6416t^2}.$$

Після підстановки у формулу для K_{II}, одержимо

$$K_{II} = 0.079\frac{P}{t^{3/2}}.$$

Задача 5. У центрі квадратної товстої пластини з лінійно-пружного матеріалу знаходиться тріщина довжиною $2l$ під кутом $\varphi = 30^\circ$ (рис. 5.21). До сторін пластини прикладено напруження $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$. Знайти ефективний коефіцієнт інтенсивності напружень.

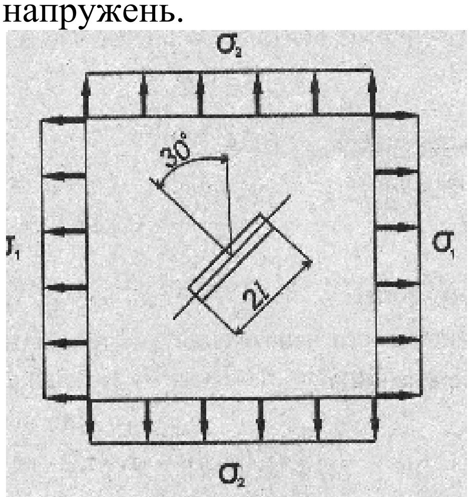


Рис.5.21

Розв'язок

Визначаємо напруження, які діють на береги тріщини. Нормальні напруження одержимо, знаходячи проекцію си на нормаль до площини тріщини:

$$\sigma_\varphi = \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin \varphi = (1/4)(3\sigma_1 + \sigma_2).$$

Дотичне напруження одержимо, знайшовши проекцію си на площину тріщини:

$$\tau_\varphi = (1/2)(\sigma_2 - \sigma_1)\sin 2\varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sigma_2 - \sigma_1).$$

Нормальні напруження викликають деформацію відриву берегів тріщини, дотичні – деформацію зсуву. Відповідні коефіцієнти інтенсивності напружень:

$$K_I = \sigma_\varphi \sqrt{\pi l} = \frac{1}{4}\sqrt{\pi l}\,(3\sigma_1 + \sigma_2),$$

$$K_{II} = \tau_\varphi \sqrt{\pi l} = \frac{\sqrt{3\pi l}}{4}(\sigma_2 - \sigma_1).$$

Ефективний коефіцієнт визначається за формулою ($K_{III} = 0$):

$$K_{еф}^2 = K_I^2 + K_{II}^2 + \frac{4}{k+1}K_{III}^2 = (1/2)\sqrt{(3\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\pi l}.$$

Цей коефіцієнт можна використати для розрахунку на міцність пластини з тріщиною при комбінованому навантаженні, базуючись на критерії

$$K_{еф} \le K_{Ic},$$

де K_{IC} – в'язкість руйнування при розтягу в умовах плоскої деформації.

Задача 6. У циліндричній трубі з лінійно-пружного матеріалу є дві тріщини, які між собою не взаємодіють(рис 5.22). Труба розтягується по осі силою P і закручується моментами M=PR. Знайти КІН для обох тріщин.

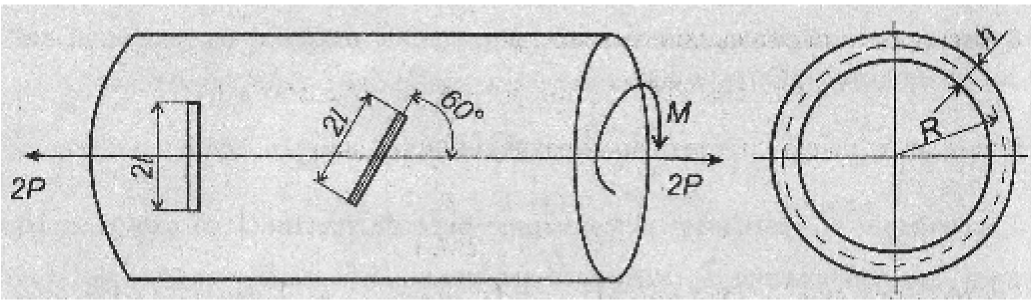


Рис.5.22

Розв'язок.

Знайдемо напруження від поздовжньої сили і момента кручення

$$\sigma_z = \frac{2P}{2\pi Rh}, \tau_{z\theta} = -\frac{M}{W_\rho} = -\frac{P}{2\pi Rh}.$$

(Для токостінної труби полярний момент опору визначається за формулою $W_\rho = 2\pi R^2 h$).

Коефіцієнти інтенсивності напружень K_I, K_{II} для тріщини, яка перпендикулярна до осі циліндра:

$$K_I = \sigma_z\sqrt{\pi l} = \frac{2P}{2\pi Rh}\sqrt{\pi l}, K_{II} = |\tau_{r\theta}|\sqrt{\pi l} = \frac{P}{2\pi Rh}\sqrt{\pi l}.$$

Ефективний коефіцієнт інтенсивності напружень:

$$K_{еф} = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} = \sqrt{5}\frac{P}{2\pi Rh}\sqrt{\pi l} = 2.24\frac{P}{2\pi Rh}\sqrt{\pi l}.$$

Для тріщини під кутом складемо умову рівноваги сил, діючих на елемент виділений біля тріщини.

Сума проекцій сил на нормаль до поверхні тріщини

$$\sigma + \tau_{\theta z}\cos 60^\circ \sin 60^\circ + \tau_{z\theta}\sin 60^\circ \cos 60^\circ - \sigma_z \sin 60^\circ = 0.$$

Нормальні напруження у похилій площадці, співпадаючої з напрямком тріщини:

$$\sigma = \frac{\sqrt{3}+3}{2} \cdot \frac{P}{2\pi Rh},$$

Сума проекцій сил на лінію тріщини

$$\tau + \tau_{\theta z}\cos^2 60^\circ - \tau_{z\theta}\sin^2 60^\circ - \sigma_z \sin 60^\circ \cos 60^\circ = 0$$

Дотичні напруження у похилій площадці, співпадаючої з напрямком тріщини

$$\tau = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \frac{P}{2\pi Rh}.$$

Коефіцієнти інтенсивності напружень для тріщин двох типів:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l} = \frac{\sqrt{3}+3}{2} \cdot \frac{P}{2\pi Rh}\sqrt{\pi l},\ K_{II} = \tau\sqrt{\pi l} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \frac{P}{2\pi Rh}\sqrt{\pi l}.$$

Ефективний коефіцієнт інтенсивності напружень для похилої тріщини:

$$K_{еф} = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} = 2.40\frac{P}{2\pi Rh}\sqrt{\pi l} > K_{еф}.$$

Порівнюючи коефіцієнти $K_{еф}$ для двох тріщин, бачимо, що тріщина під кутом є більш небезпечною.

Завдання 1 для РГР

1.Побудувати графіки напружень $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_{ekv}^{III}, \sigma_{ekv}^{IV}$ для трьох видів тріщин згідно з формулами (5.9)-(5.11).

2.Побудувати графіки напружень $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_{ekv}^{III}, \sigma_{ekv}^{IV}$ згідно з формулами (5.13-5.15), одержаними методами нелінійної теорії пружності.

Лекція 6
Поправка Ірвіна на пластичність. Концепція Гриффітса

6.1 Визначення радіуса площі пластичності

З розглянутих в попередньому розділі рішень пружних задач про розподіл напружень в околі вершини тріщини витікає, що в цій області напруження зростають до нескінченності. На практиці ж матеріали (зокрема, метали) звичайно мають границю текучості; при напруженнях вище за цю границю у матеріалі виникають пластичні деформації. Це означає, що в металах, в околі вершини тріщини, завжди є область, в якій виникають пластичні деформації, і, отже, напруження не можуть бути нескінченно великими. Цю область називають пластичною зоною при вершині тріщини. Отримати грубу оцінку для розміру зони пластичності як для плоского деформованого, так і для плоского напруженого стану нескладно. В цьому параграфі обмежимося розглядом випадку плоского напруженого стану.

На рис. 6.1 показано розподіл напружень σ_y при $\theta = 0$.

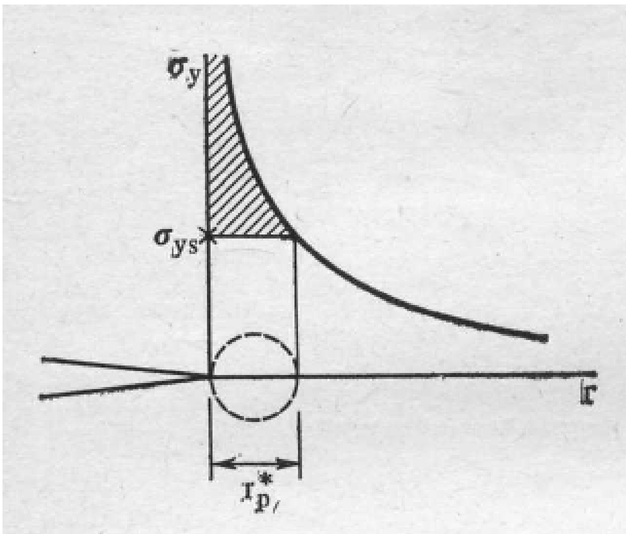


Рис. 6.1. Перша оцінка розміру зони пластичності

У цій площині у точках, відстань від яких до вершини тріщини менше ніж r_p^*, напруження перевищують границю текучості σ_T (на рисунку її позначено σ_{ys}). У першому наближенні цю відстань можна вважати рівною розміру зони пластичності. Підставляючи величину r_p^* і напруження $\sigma_{ys} \equiv \sigma_T$ у формулу (5.9) для напружень σ_y при вершині тріщини,

$$\sigma_y = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) + ...,$$

одержимо відстань r_p^* від вершини тріщини до границі області пластичності

$$\sigma_y = \sigma_T = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_p^*}}, \quad \Rightarrow \mathrm{r_p^*} = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_T^2} \quad . \tag{6.1}$$

Насправді розмір зони пластичності більше ніж r_p^*: графік залежності σ_y від r повинен також покривати і ту частину навантаження, яке на рисунку 6.1 зображено у вигляді заштрихованої області. Це можна пояснити таким чином. Асимптотичні формули для напружень у вершині тріщини одержані для ідеально пружного тіла, а напруження для пружно-пластичного тіла не можуть перевищувати границі текучості. Тому в дійсності розмір зони пластичних деформацій повинен бути більшим, настільки, щоб компенсувати зменшення напружень у зоні А.

Ірвіном було показано, що наявність зони пластичності призводить до того, що сусідні області сприймають напруження, які відповідають заштрихованій зоні А і там напруження зростають (але знову таки до величини не більше границі пластичності). Можна вважати, що довжина тріщини збільшується на таку величину, щоб урівноважити сили, що відповідають зоні А.

В результаті пластичних деформацій біля вершини тріщини переміщення більше, а жорсткість менше ніж в пружному випадку. Іншими словами, пластина поводиться так, ніби в ній є тріщина дещо більшого розміру. Ефективна довжина тріщини $2a_{еф\!ф} = 2(a+\delta)$, де $2a$ — фізичний розмір тріщини, а δ — поправка, обумовлена збільшенням пластичної зони. На рис. 6.2 тріщину розміру $2a$ замінено тріщиною з розміром $2(a+\delta)$ і приведено розподіл пружних напружень σ_y при вершині цієї ефективної тріщини. Як і раніше, напруження при вершині цієї тріщини обмежені границею текучості $\sigma_{ys} \equiv \sigma_T$. Напруження на ділянці δ області перед дійсною тріщиною дорівнює границі текучості. Тому величина δ повинна бути достатньо великою, щоб покрити частину навантаження, втрачену тоді, коли з графіка пружного розподілу напружень була відкинуто область *A* (рис. 6.2).

Очевидно, площа *A* повинна дорівнювати площі *B*. Відстань λ на рис. 6.2 знаходиться таким чином:

$$\sigma_T = \frac{K}{\sqrt{2\pi\lambda}} = \frac{\sigma\sqrt{\pi(a+\delta)}}{\sqrt{2\pi\lambda}}, \quad \text{або } \lambda = \frac{a^2(a+\delta)}{2\sigma_T^2} \approx r_p^* \quad . \tag{6.2}$$

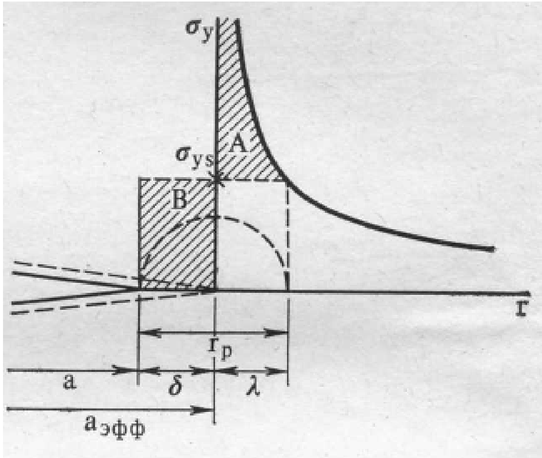


Рис. 6.2. Друга оцінка розміру зони пластичності

Оскільки в порівнянні з розміром тріщини величина δ мала, то нею можна нехтувати; звідси витікає, що $\lambda = r_p^*$ заданому співвідношенням (6.1). Площа B рівна $\sigma_{ys}\delta$, отже, умова $B = A$ приводить до залежності

$$\sigma_{ys}\delta = (\int_0^{\lambda} \sigma\sqrt{\frac{a-\delta}{2r}}dr) - \sigma_{ys}\lambda, \quad (\sigma_{ys} \equiv \sigma_T)\,. \tag{6.3}$$

Нехтуючи величиною δ у порівнянні з a і використовуючи співвідношення (6.2), отримаємо

$$\delta + r_p^*\sigma_T = \sigma\sqrt{2ar_p^*}, \quad \text{або } (\delta + r_p^*)^2 = \frac{2\sigma^2 a}{\sigma_T^2} r_p^* = 4r_p^{*2}, \tag{6.4}$$

$$\text{отже } \delta = r_p^* \quad \text{і} \quad r_p = \lambda + \delta = 2r_p^*, \tag{6.5}$$

тобто розмір зони пластичності удвічі перевищує першу оцінку r_p^*.

Оскільки $\delta = r_p^*$, то виходить, що тріщина поводиться так, ніби її довжина дорівнює $2(a + r_p^*)$. Величина r_p^* називається поправкою Ірвіна на пластичність. Вважаючи попередньо, що зона пластичності має форму круга, приходимо до висновку, що в нашому випадку тріщину можна представити так, як це зроблено на рис. 6.3, де ефективна тріщина доходить до середини зони пластичності.

Якщо проводити корекцію на зону пластичності послідовно, то необхідно також внести поправку у величину K:

$$K = \sigma\sqrt{\pi(a + r_p^*)} = \sigma\sqrt{\pi(a + \frac{K^2}{2\pi\sigma_T^2})}\,. \tag{6.6}$$

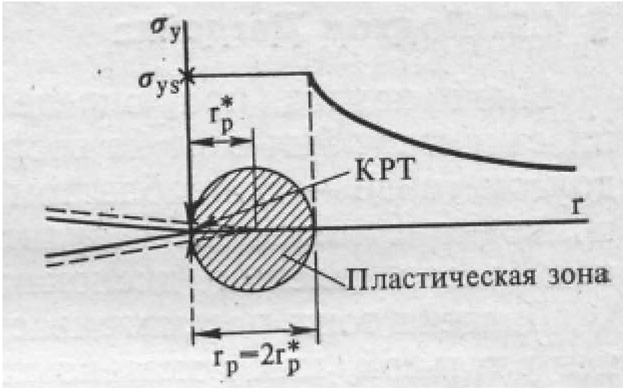


Рис. 6.3. Поправка Ірвіна на пластичність

Використання рівняння (6.6) пов'язано з деякими труднощами, оскільки для визначення K тут необхідно застосувати ітераційний процес. Останнього можна уникнути, якщо для обчислення r_p^* покласти $K = \sigma\sqrt{\pi a}$, а скореговану величину K потім визначити з рівняння (6.6). І навпаки, для заданого K можна знайти не скореговане значення напруження із співвідношення $\sigma = K/\sqrt{\pi a}$, що дозволяє визначити r_p^*. Після цього скореговане значення напруження визначається за формулою $\sigma = K\sqrt{\pi(a + r_p^*)}$. На практиці для величини r_p^* корекція на зону пластичності застосовується рідко. Корекцію на зону пластичності в тому вигляді, в якому вона задана співвідношенням (6.1), при плоскій деформації застосовувати некоректно у зв'язку з тим, що при плоскій деформації розрахункове напруження, що визначає появу текучості, значно збільшується .

6.2 Підхід Дагдейла

Інший підхід для визначення розміру зони пластичності був запропонований Дагдейлом [3] і в дещо іншому вигляді — Баренблаттом [1].

Дагдейл розглядав ефективну тріщину, яка довша за реальну, як показано на рис. 6.4, *а*. Частина країв цієї ефективної тріщини, що знаходиться перед фронтом розвитку реальної тріщини (на рис. 6.4,а вона позначена відрізками ρ), знаходиться під дією напружень, які дорівнюють границі текучості $\sigma_{ys} \equiv \sigma_T$, і намагаються закрити тріщину (через область ρ тріщина насправді не проходить; матеріал тут все ще знаходиться в стані, здатному витримувати напруження, яке дорівнює границі текучості).

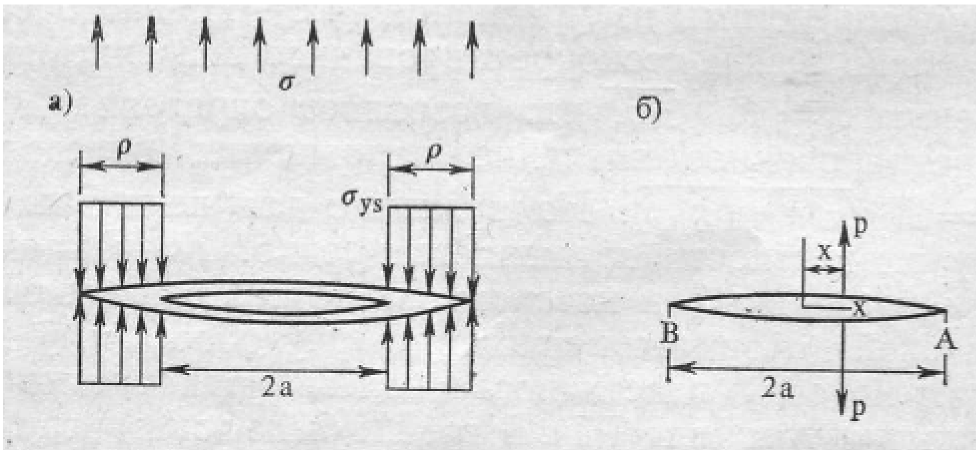


Рис.6.4 Наближення Дегдейла

Таким чином ця ділянка довжиною ρ (по обидва боки тріщини) знаходиться під дією зовнішнього однорідного поля напружень σ, які намагаються розкрити тріщину, і напружень $\sigma_{ys} = \sigma_T$, які стягують береги тріщини на ділянці ρ. Розмір ρ вибирається з таким розрахунком, щоб сингулярність по напруженню у точках $x = \pm a$ зникла і коєфіцієнт K_σ став рівним нулю. Це значить, що інтенсивність напружень, виникаюча під дією однорідного поля напружень σ, повинна компенсуватися напруженням з коефіцієнтом інтенсивності K_ρ, яке виникає під дією напружень $\sigma_{ys} = \sigma_T$, тобто

$$K_\sigma + K_\rho = 0. \tag{6.10}$$

З умови (6.10) можна визначити ρ. Інтенсивність напружень, які виникають під дією розклинюючих сил p, зображених на рис. 6.4, визначається співвідношеннями (лекція 5)

$$K_A = \frac{p}{\sqrt{\pi a}}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}, \quad K_B = \frac{p}{\sqrt{\pi a}}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}, \tag{6.11}$$

Якщо розклинюючі сили розподілені від точки *s* до вершини тріщини (як у випадку, розглянутому Дагдейлом), то інтенсивність напружень

$$K = \frac{p}{\sqrt{\pi a}}\int_S^a \left(\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)dx \tag{6.12}$$

Результат інтегрування цього виразу –

$$K = 2p\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \arccos \frac{s}{a}\Bigg|_{a}^{a+\rho} \quad . \tag{6.13}$$

Для тріщини Дагдейла, зображеній на рис. 6.4, *a,* це інтегрування необхідно проводити в межах від $s = a$ до $a + \rho$. Отже, у співвідношення (6.13) замість *s* треба підставити *a,* а замість *a* – значення а+ρ, а також покласти $p = \sigma_T$. Таким чином, після підстановки границь інтегрування, одержимо

$$K_\rho = 2\sigma_T\sqrt{\frac{\alpha + \rho}{\pi}} \arccos \frac{a}{a+\rho} . \tag{6.14}$$

Відповідно до рівняння (6.10) цей коефіцієнт інтенсивності напружень повинен дорівнювати K_σ, причому $K_\sigma = \sigma\sqrt{\pi(a+\rho)}$. Після цього величину ρ можна визначити з рівняння (6.10) таким чином:

$$\frac{a}{a+\rho} = \cos\frac{\pi\sigma}{2\sigma_T} \quad \Rightarrow \quad \rho = a\left(\frac{1-\cos(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_T})}{\cos(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_T})}\right). \tag{6.15}$$

Нехтуючи в розвиненні косинуса в ряд за степенями аргумента членами вищих порядків, отримаємо

$$\rho = \pi^2\sigma^2 a/(8\sigma_T^2) = \pi K^2/(8\sigma_T^2). \tag{6.16}$$

Порівняємо цей результат з виразом $r_p = 2r_p^* = K^2/(\sigma_T^2)$. Легко бачити, що обидва вирази майже ідентичні. Для великих значень $\frac{\sigma}{\sigma_T}$ замість рівняння (6.16) необхідно використовувати (6.15), тоді відмінність від розміру зони пластичності по Ірвіну стає більш суттєвою.

Були запропоновані і інші корекції зони пластичності. Необхідність в корекції відпадає у тому випадку, коли можна застосувати механіку руйнування в рамках теорії пружності, тобто коли пластична зона мала в порівнянні з розміром тріщини. Якщо зона пластичності за своїми розмірами перевершує тріщину, то застосування корекції зону не завжди приводить до вірних результатів, оскільки в цьому випадку вирази для ***K***, засновані на пружних рішеннях, справедливі лише в грубому наближенні.

6.3 Форма зони пластичності .

Припущення про форму пластичної зони у вершині тріщини, введене раніше, взагалі не відповідає дійсності. Більш точний результат можна отримати розглядаючи умови пластичності для кутів θ, які відрізняються від нуля.

Розмір і форма зони пластичності залежать від виду напруженого стану. При плоскій деформації зона пластичності менша ніж при плоскому напруженому стані. Нагадаємо, що плоский напружений стан має місце для тонких пластин, коли зона пластичності більше товщини пластини і напруженням по товщині немає компенсації. Плоска деформація має місце при значній товщині (порівняно з розмірами зони пластичності). Це пов’язано з наявністю третього (стискаючого) головного напруження і збільшенням у зв’язку з цим розрахункової границі текучості.

У площині $\sigma_y - x$ (рис. 6.5) зона пластичності для плоского напруженого стану у дев'ять разів перевищує зону при плоскій деформації (рис. 6.5 б).

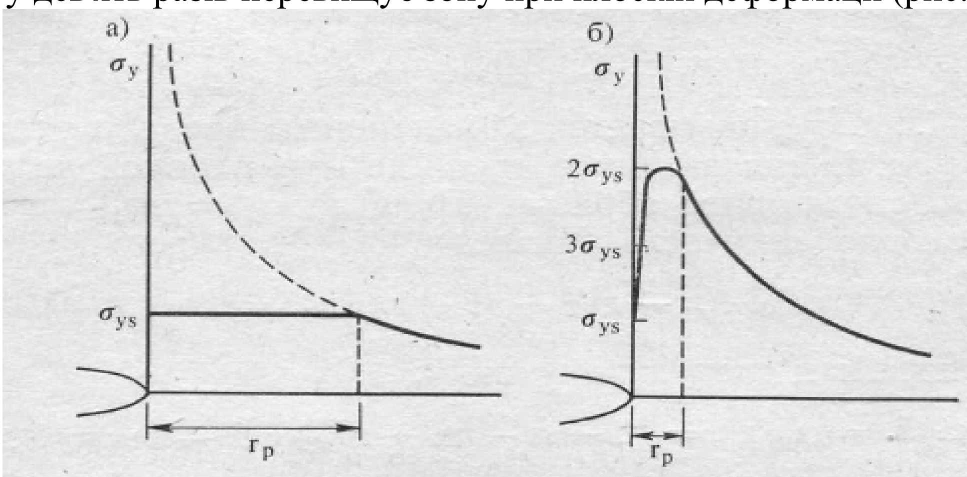


Рис.6.5 Розподілення напружень при плоскому напруженому стані (а) і при плоскій деформації (б)

При експериментальному визначенні K_{Ic} для випадку плоскої деформації необхідно використовувати зразок достатньо великої товщини. Залежність K_{Ic} від товщини наведено на рис. 6.6.

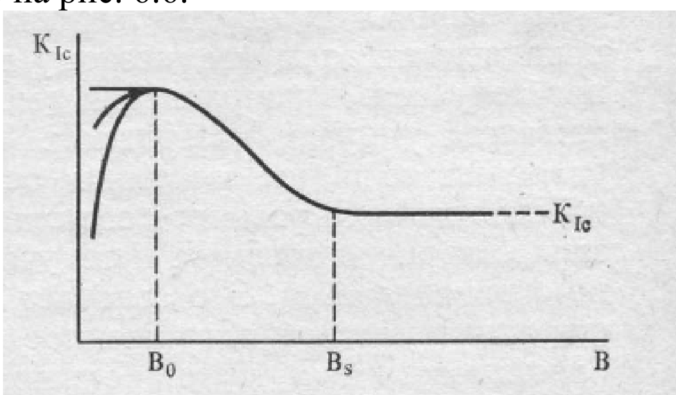


Рис.6.6 Залежність K_{IC} від товщини

При плоскому напруженому стані у першому наближенні розмір пластичної зони по осі x можна визначити як відстань від вершини тріщини до точок, де напруження за формулами для ідеально-пружного матеріалу досягають границі текучості. На лінії $\theta = 0$

$$\frac{K_1}{\sqrt{2\pi r_{п}}} = \sigma_{т}, \qquad (\sigma_T \text{ – границя текучості}),$$

звідки

$$r_{п} = \frac{K_1^2}{2\pi\sigma_T^2}.$$

Аналогічно можна визначити розмір пластичної зони і у напрямках під кутами $0 \le \theta \le \pi$, але для цього треба використати повні формули Вестергардта.

Згідно з формулами (4.12) головні напруження визначаються формулами

$$\sigma_1 = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_2 = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right) \qquad ;$$

$$\sigma_3 = \mu\left(\sigma_1+\sigma_2\right) = 2\mu\frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}$$

(для плоского напруженого стану $\sigma_3 = 0$).

За критерієм Мізеса

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2 = 2\sigma_T$$

для плоскої деформації умова появи пластичних деформацій, після підстановки напружень $\sigma_{1,2,3}$ матиме вигляд

$$\frac{K_1^2}{2\pi r}\left[\frac{3}{2}\sin^2\theta+\left(1-2\mu\right)^2\left(1+\cos\theta\right)\right] = 2\sigma_T^2.$$

Для плоского напруженого стану –

$$\frac{K_1^2}{2\pi r}\left(1+\frac{3}{2}\sin^2\theta+\cos\theta\right) = 2\sigma_T^2.$$

Таким чином, границя пластичних деформацій у полярних координатах r,θ (рис.6.7) описується такими рівняннями:

Для плоскої деформації

$$r_{п}(\theta) = \frac{K_1^2}{4\pi\sigma_T^2}\left[\frac{3}{2}\sin^2\theta+\left(1-2\mu\right)^2\left(1+\cos\theta\right)\right],$$

для плоского напруженого стану

$$r_{\text{п}}(\theta)=\frac{K_1^2}{4\pi\sigma_T^2}\left(1+\frac{3}{2}\sin^2\theta+\cos\theta\right) \qquad (6.17)$$

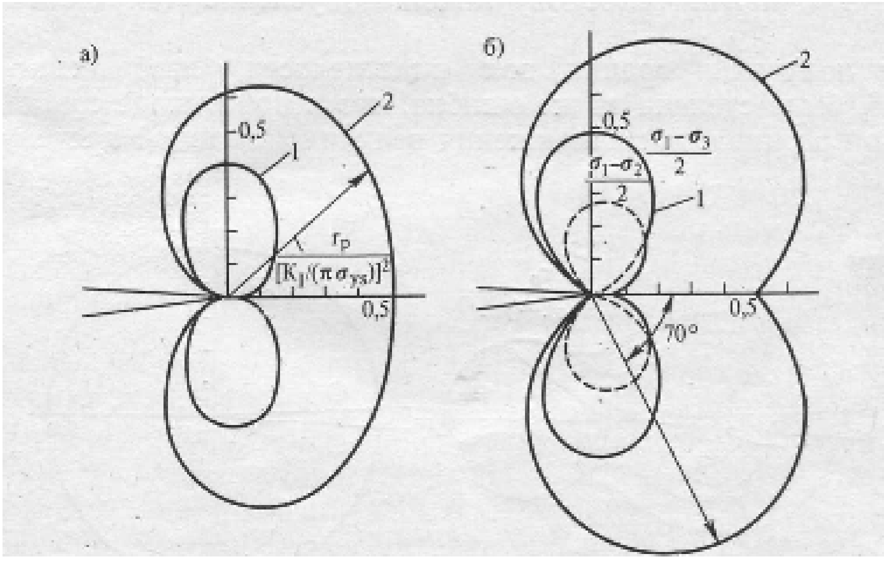


Рис.6.7 Форми зон пластичності для тріщин типу I за гіпотезами Мізеса (а) і Треска (б); (1- плоска деформація, 2 - плоский напружений стан)

Аналогічно можна побудувати зону пластичності для тріщин двох інших типів (рис.6.8). (На рисунках використані безрозмірні координати).

$$x_1 = x\Big/\left(K_1\big/\sigma_T\sqrt{\pi}\right)^2, \quad y_1 = y\Big/\left(K_1\big/\sqrt{\pi}\sigma_T\right)^2.$$

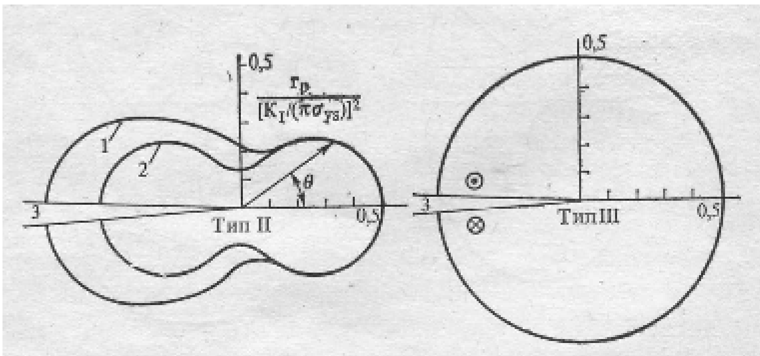


Рис. 6.8 Форми зон пластичності для тріщин типу II і III (1- плоска деформація, 2 - плоский напружений стан)

Зазначимо, що використані формули для пружного матеріалу не враховують зміну напруженого стану у всьому об’ємі при початку і розвитку пластичних деформацій. Іншими словами, для одержання дійсної форми і розмірів зони пластичності необхідно розв’язувати задачу для пружно-пластичного матеріалу.

Для тріщини типу III контур зони пластичності має форму кола у площині (y_1,x_1) рис. 6.8 і визначається рівнянням

$$y^2 + \left(x - \frac{d_1}{2}\right)^2 = \frac{d_1^2}{4}, \text{ де } d_1 = 4K_{III}^2 \big/ \pi\sigma_T^2 .$$

6.4 Енергетичний принцип. Концепція Гріффітса

Англійський вчений Гріфітс 26 лютого 1920р. опублікував статтю "***Явище руйнування і текучості твердого тіла***" у якій стверджував, що зниження теоретичної міцності у конструкціях або експериментальних зразках пояснюється наявністю в них дефектів, розміри яких великі порівняно з міжмолекулярною відстанню.

Згідно з концепцією Гріфітса однієї концентрації напружень мало для розвитку тріщини. Якщо не підводити достатньої енергії до вершини тріщини, вона зупиниться.

Розглянемо пластину одиничної товщини і з достатньо великими розмірами a і b (рис. 6.9), на яку діють напруження σ.

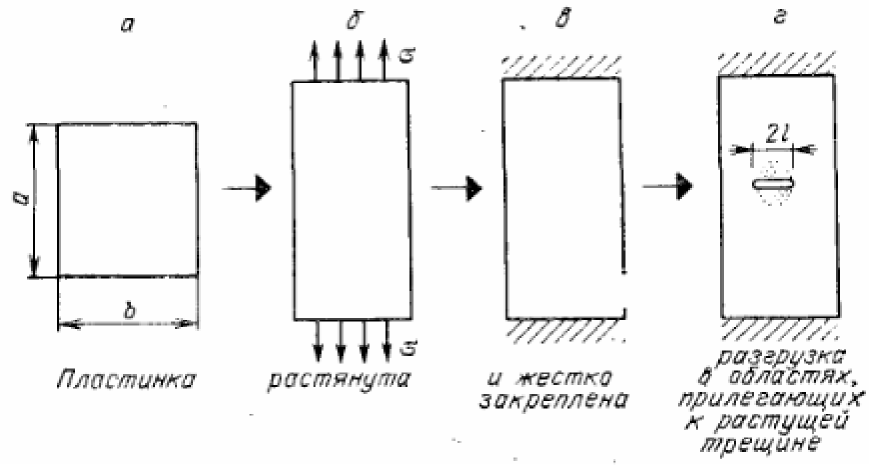


Рис.6.9

Потенційна енергія деформації пластини (сталі напруження σ)

$$\boldsymbol{W = \frac{\sigma^2}{2E} a \cdot b \cdot 1}. \tag{6.18}$$

На одиницю площі пластини приходиться енергія $\frac{\sigma^2}{2E}$. Якщо в пластині виникає тріщина довжиною $\boldsymbol{l}$ ($\boldsymbol{l << a,\ l << b}$), то вона приведе до зменшення напружень, в основному у зоні біля тріщини (заштрихована зона на рис.6.9,г).

Вивільнена енергія дорівнюватиме

$$\boldsymbol{W_T = W - c\frac{\sigma^2}{2E} l^2}, \tag{6.19}$$

(с – корегуючий множник на невизначеність зони розвантаження, яку наближено вважаємо квадратом $l \times l$).

Якщо скористатися розв'язком задачі про розподілення напружень у пластині з еліпсоподібним розрізом, можна показати, що $c = 2\pi$ для плоского напруженого стану, тобто

$$W_T = W - \frac{\pi\sigma^2 l^2}{E} \tag{6.20}$$

Для плоскої деформації другий додаток треба помножити на $(1-\nu^2)$. При незмінних σ, діючих на пластину, вивільнена енергія прямує у вершину тріщини, де витрачається на збільшення напружень і руйнування (тобто збільшення тріщини).

Введемо поняття питомої роботи руйнування на одиницю площі нової поверхні γ. Тоді робота на створення тріщини довжиною $2l$ буде дорівнювати $\Gamma = 4\gamma l$. (Товщина пластини дорівнює одиниці, створюються дві поверхні $2l \cdot 1$).

Розглянемо баланс енергії при утворенні і розвитку тріщини. При збільшенні тріщини на Δl, вивільнюється енергія

$$\Delta W = \left(W\left(l+\Delta l\right) - W\left(l\right)\right) \approx \frac{\pi\sigma^2 l 2\Delta l}{E}. \tag{6.21}$$

Енергія, яка піде на збільшення довжини тріщини

$$\Delta\Gamma = 4\gamma\left(l+\Delta l\right) - 4\gamma l = 4\gamma\Delta l. \tag{6.22}$$

Якщо виявиться, що $\Delta W > \Delta\Gamma$, то тріщина буде розвиватися, тому що вивільненої енергії достатньо для росту тріщини. Вивільнена енергія буде переходити у кінетичну і збільшуватися з ростом тріщини, при цьому пластина зруйнується.

Якщо $\Delta W < \Delta\Gamma$, то енергії для розвитку тріщини недостатньо і тріщина не змінюється.

Таким чином, умова критичного стану є рівність

$$\Delta W = \Delta\Gamma. \tag{6.23}$$

Для пластини ця умова матиме вигляд

$$\frac{2\pi\sigma^2 l}{E}\Delta l = 4\gamma\Delta l \;\Rightarrow\; \sigma = \sqrt{\frac{4E\gamma}{\pi l}}, \text{ або } l = \frac{2E\gamma}{\pi\sigma^2}. \tag{6.24}$$

Звідси при заданій довжині тріщини можна знайти напруження, при якому тріщина почне розвиватися або критичну довжину тріщини при заданому напруженні.

Одержані формули відносяться до плоского напруженого стану. Для плоскої деформації вони матимуть вигляд

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi\left(1-\nu^2\right)l}} \quad , \qquad l = \frac{2E\gamma}{\pi\left(1-\nu^2\right)\sigma^2}. \tag{6.25}$$

Графік залежності (6.25) наведено на рис. 6.10 (довжина тріщини відкладається на горизонтальній осі.)

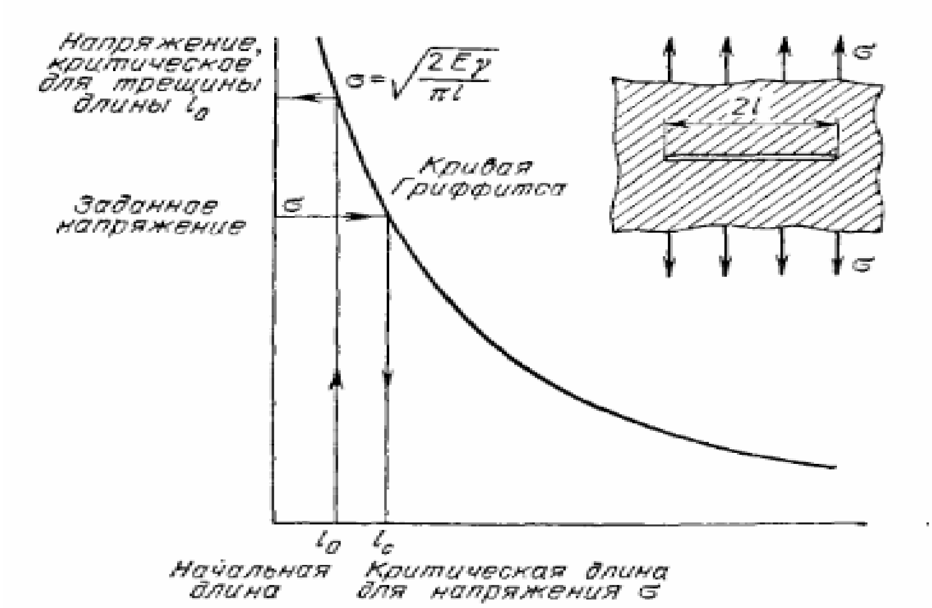


Рис.6.10 Залежність критичних навантажень від розмірів тріщини Грифітса

Труднощі, пов’язані з визначенням γ, не дозволили скористатися результатами Гріффітса до 1957року, коли Ірвін ввів силовий критерій і довів еквівалентність силового і енергетичного підходів.

Розглянемо докладніше концепцію квазікрихкого руйнування за Ірвіном. Нехай в ідеально пружному тілі є початковий розріз. Для того, щоб він почав розвиватися і збільшувати свою поверхню, необхідна енергія. Одночасно з розвитком розрізу, тобто зі створенням нової поверхні вільної від навантажень, вивільнюється енергія внаслідок зменшення деформацій у районі розрізу. Таким чином при розвитку тріщини на величину ΔS згідно з законом збереження енергії матимемо умову

$$\delta\Gamma = G\delta S\,. \tag{6.26}$$

де $\delta\Gamma$ - робота руйнування, яка необхідна для утворення нової поверхні розриву площею δS; $\boldsymbol{G}$ – інтенсивність енергії, яка вивільнюється внаслідок локального зменшення деформацій. Гріфітс не врахував появи пластичних деформацій у вершині тріщини. Першим на це звернув увагу венгерський вчений Е.О. Орован, який зробив припущення, що енергія, яка вивільнюється, пов’язана з утворенням зони пластичних деформацій об’єму матеріалу перед тріщиною.

Якщо лінійні розміри цих об’ємів малі порівняно з довжиною тріщини, то потік пружної енергії можна обчислювати згідно з розв’язком пружної задачі, і вважати, що ця енергія іде на розвиток пластичних деформацій У цьому і полягає концепція квазікрихкого руйнування Гріфітса-Орована-Ірвіна, яка відкрила шлях для застосування теорії Гріфітса до розв'язання інженерних проблем.

Величину потоку енергії, який іде у вершину тріщини можна обчислити через роботу сил у вершині тріщини.

Розглянемо напруження у вершині тріщини (рис.6.11).

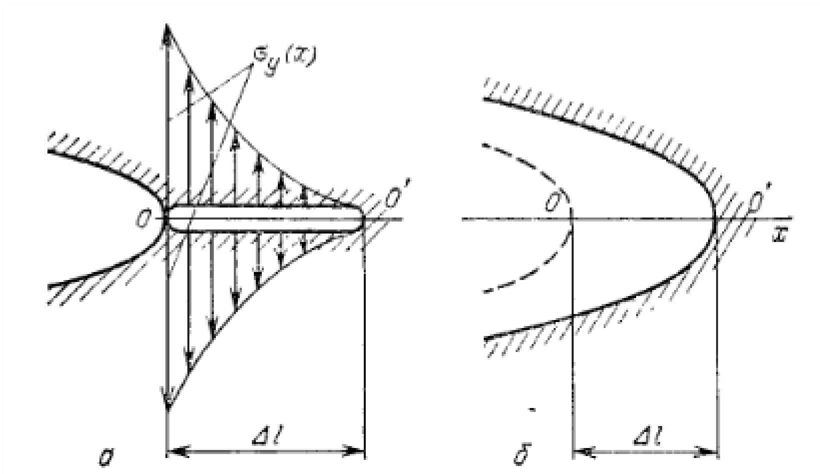


Рис. 6.11 Вершина тріщини до її переміщення (ф) і після (б)

Максимальне напруження дорівнює границі текучості і симетрично зменшується при віддаленні від вершини тріщини.

Якщо утворити розріз (подовжити тріщину), то напруження зменшиться до нуля, а поверхні тріщини, що утворилася розійдуться на величину V згідно з формулами Колосова-Вестергардта

$$\sigma_y dx = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi x}} dx, \qquad v = \frac{4\left(1-\nu^2\right)}{E} K_1 \sqrt{\frac{\Delta l - x}{2\pi}} \text{ (тут } \theta=\pi;\ r=\Delta l - x\text{)}, \quad (6.27)$$

x – відстань від вершини тріщини.

Роботу утримуючих напружень σ_y при збільшенні тріщини на величину dx, знаходимо як площу $\frac{1}{2}\sigma_y dx \cdot v$. Повна робота на довжині Δl визначається інтегралом

$$2\int_0^{\Delta l} \frac{1}{2}\sigma_y v dx = \frac{4\left(1-\nu^2\right)K_1^2}{2\pi E}\int_0^{\Delta l}\sqrt{\frac{\Delta l - x}{x}}dx = \frac{\left(1-\nu^2\right)K_1^2}{E}\Delta l\ . (6.28)$$

Сили $\sigma_y v$ подвоюються тому що працюють напруження, прикладені до обох берегів тріщини

Потік енергії дорівнює чисельно роботі, віднесеній до одиниці приросту довжини тріщини, тобто $\left(\frac{\left(1-\nu^2\right)K_1^2}{E}\Delta l\right)/\Delta l$, що дорівнює

$$G_I = \frac{1-\nu^2}{E} K_1^2 \text{ - для плоскої деформації,} \tag{6.29}$$

$$G_I = \frac{1}{E} K_1^2 \text{ - для плоского напруженого стану.} \tag{6.30}$$

Аналогічно можна одержати відповідні залежності для тріщин II і III типу. Для тріщини загального виду

$$G = G_I + G_{II} + G_{III} = \frac{1-\nu^2}{E}\left(K_I^2 + K_{II}^2\right) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 . \tag{6.31}$$

Таким чином, маємо два альтернативних формулювання критерію руйнування. Тріщина буде розвиватися, якщо:

1. Інтенсивність енергії G, що вивільнюється, досягає критичного значення

$$G = d\Gamma / dS = G_c . \tag{6.32}$$

2. Коефіцієнт інтенсивності напруження К досягає критичної величини

$$K = K_c . \tag{6.33}$$

Тобто енергетичний критерій початку зростання тріщини має вигляд $G = G_C$. а силовий $K = K_C$..

Одержані вище залежності справедливі для лінійної механіки руйнування, яка використовує розв'язки лінійної теорії пружності. У концепції Орована-Ірвіна (квазікрихке руйнування) приймається припущення про малість зони пластичних деформацій у вершині тріщини порівняно з довжиною тріщини. Крихке і квазікрихке руйнування, як правило, не розрізняють одне від одного.

Навіть якщо довжина пластичної зони складає до 20% довжини тріщини асимптотичні формули для напружень будуть правильно описувати напруження навколо пластичної зони. Тому і розмір пластичної зони і інтенсивність пластичних деформації у ній визначаються коефіцієнтом інтенсивності напружень ***K*** і властивостями матеріалу.

Необхідно тільки при визначенні коефіцієнта ***K*** збільшувати довжину тріщини (з кожного боку) на половину довжини пластичної зони (вводити пластичну поправку Ірвіна) тобто у формі для коефіцієнта інтенсивності замінити півдовжину l на $l + r_y$, де $r_y = \dfrac{K_1^2}{2\pi\sigma^2}$.

Для плоскої деформації у зв'язку з малістю поправки, нею нехтують.

Розміри пластичної зони будуть залежати від характеристик матеріалу і товщини зразка. Наближену форму пластичної зони у площині тріщини наведено на рис. 6.12.

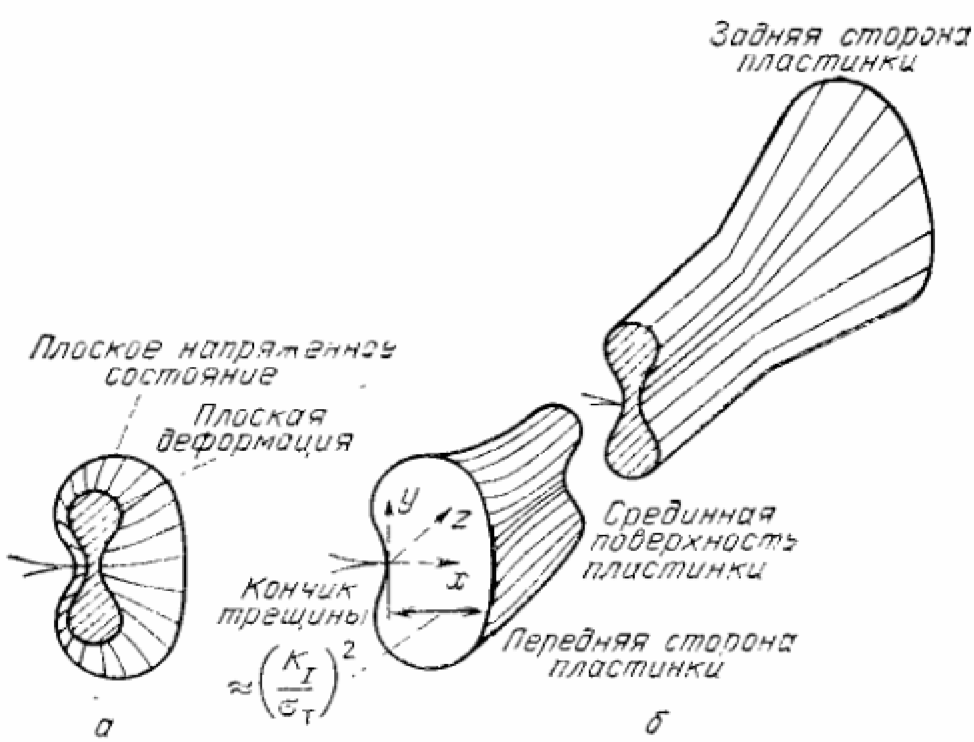


Рис.6.12 Пластична зона на кінцях тріщини, що проходить по усій товщині пластини

Таким чином у лінійній механіці руйнування визначальним критерієм руйнування є коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН), тому експериментальне або чисельне визначення коефіцієнта ***K*** є дуже важливою задачею механіки руйнування.

У загальному випадку визначення КІН для об'єму довільної конфігурації є дуже складною задачею навіть без врахування пластичних деформацій. У більшості таких випадків для цього використовують чисельні методи, в основному метод скінченних елементів [див. довідник «Механика разрушения…» ред. В.В.Панасюк].

6.5 Формула податливості Ірвіна. Стійкий і нестійкий стан тріщини

Виведемо формулу для потоку пружної енергії ***G*** у вершину тріщини (формула податливості Ірвіна). Нехай дано пружне тіло, на яке діє зовнішня сила P. У зв'язку з приростом довжини тріщини на dl**,** точка прикладення сили зміститься на величину $d\Delta$, і сила P виконає роботу $Pd\Delta$. Величину Δl можна записати як добуток податливості пластини λ на величину сили P, тобто $\Delta l = P\lambda$. (У зв'язку з приростом тріщини податливість змінюється).

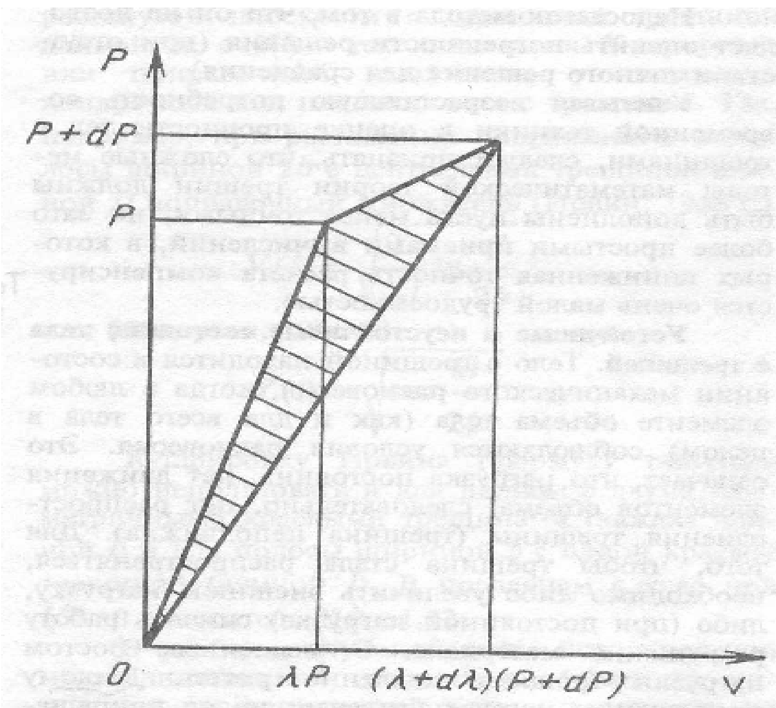


Рис.6.13

На діаграмі деформування "сила $\boldsymbol{P}$ – переміщення $\boldsymbol{v}$" початок переміщення тріщини відповідає точці з координатами (P, v), а кінець $(P+dP, v+dv)$ (рис.6.13). При розвантаженні з цих двох точок прямі лінії ідуть у початок координат, а площа трикутника між ними є виділена пружна енергія, яка дорівнює роботі, що пішла на збільшення тріщини. Якщо позначити пружну енергію на одиницю площі тріщини через $G(\frac{Нм}{м^2})$, то енергія, яка відноситься до елементарного збільшення тріщини, матиме вигляд

$$Gtdl = \frac{1}{2}P^2 d\lambda. \qquad (6.34)$$

(Вище прийнято, що $v = \lambda P$, де $\lambda(\frac{м}{Н})$ – коефіцієнт податливості. При цьому $v + dv = (\lambda + d\lambda)(P + dP)$). Враховуючи, що $d\lambda = \frac{d\lambda}{dl}dl$, одержимо формулу податливості

$$G = \frac{P^2}{2t}\frac{d\lambda}{dl}. \qquad (6.35)$$

Одержана залежність між енергією $\boldsymbol{G}$ силою і податливістю зразка може бути використана для визначення потоку енергії $\boldsymbol{G}$ у вершину тріщини. Згідно з цією формулою (формула податливості Ірвіна) необхідно побудувати криву $\lambda(l)$ залежності податливості зразка від довжини тріщини і визначити похідну

$\dfrac{d\lambda}{dl}$ (можна графічно по кривій $\lambda(l)$).Після цього потік енергії у вершину тріщини на одиницю товщини зразка обчислюється за формулою

$$G = \frac{1}{2}P^2\frac{d\lambda}{dl}. \qquad (6.36)$$

Цю формулу застосовують також для визначення відповідного коефіцієнта інтенсивності напружень згідно з формулами (6.29),(6.30):

Для плоского напруженого стану $K = \sqrt{GE}$, (6.37)

Для плоскої деформації $K = \sqrt{\dfrac{GE}{(1-\nu^2)}}$. (6.38)

Зрозуміло, що оскільки зростання тріщини пов’язано з балансом енергії, то можна сформулювати енергетичний критерій руйнування у такому вигляді:

$$G \le G_C, \qquad (6.39)$$

де G потік енергії у вершину тріщини, G_C – питома (на одиницю площі).

робота руйнування (інакше в’язкість руйнування).

При $G < G_C$ тріщина не росте, при $G = G_C$ вона може почати зростати.

Враховуючи одержані співвідношення, можна стверджувати, що силовий і енергетичний критерії еквівалентні.

Затрати енергії на створення нової поверхні у значній мірі пов’язані з розмірами і формою пластичної зони перед вершиною тріщини. Оскільки зі збільшенням товщини деталі розміри пластичної зони також змінюються, то величина G_C залежить від товщини зразка . У зв’язку з цим при експериментальному визначенні G_C (або K_C) бажано вказувати і товщину зразка. При достатньо великій товщині розміри пластичної зони стабілізуються, ці параметри можна вважати сталими (їх позначають G_{1C}, K_{1C}).

Розглянемо зразок у вигляді двохконсольної балки довжиною l (так званий ДКБ - зразок). Прикладемо до обох консолей зразка взаємно протилежні сили (рис. 6.14). Будемо вважати, що l – це довжина (підвдовжина) тріщини

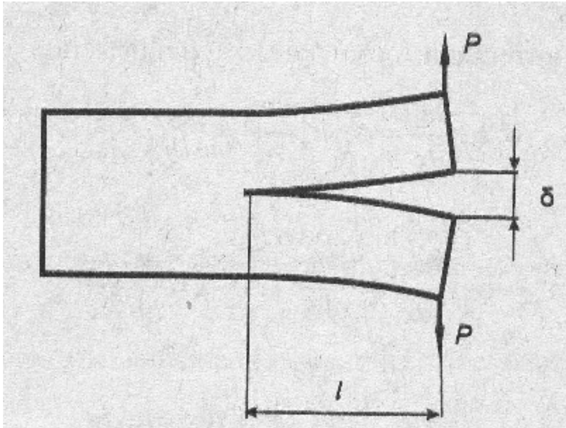


Рис 6.14

Прогин консолі при дії однієї сили дорівнює $\dfrac{Pl^3}{3EJ}$. Взаємне переміщення точок крайніх перерізів двох консолей (прямокутний переріз висотою h і моментом інерції $J = th^3/12$ –

$$\Delta = \frac{8pl^3}{Eth^3} = \lambda P \quad (\lambda = \frac{8l^3}{Eth^3}).$$

Згідно з формулою податливості Ірвіна –

$$G = \frac{P^2}{2t}\frac{d\lambda}{dl} = \frac{P^2}{2t^2}\frac{24l^2}{Eh^3}. \tag{6.40}$$

Коефіцієнт інтенсивності напружень для ДКБ зразка згідно з формулою (6.37)

$$K = \sqrt{EG} = \frac{2\sqrt{3}Pl}{th^{3/2}}. \tag{6.41}$$

Ця наближена формула тим точніша, чим більша довжина консолей.

На закінчення цієї лекції відзначимо наступне. По досягненні тілом граничного стану рівноваги зростання тріщини може бути як стійким, так і нестійким.

В стійкому стані тріщина нерухома при сталому зовнішньому навантаженні, і для зростання тріщини на малу величину площі (або довжини) потрібен також малий приріст величини параметра зовнішнього навантаження. Отже, якщо за критерієм руйнування знайдено зв'язок між параметром зовнішнього навантаження ***P*** і довжиною тріщини ***l***, то для стійкої тріщини справедливі нерівності

$$\frac{dP}{dl} > 0 \text{ або } \frac{dK}{dl} < 0.$$

Якщо коефіцієнт $\boldsymbol{K}$ росте із зростанням і сили, і довжини тріщини, то з умови незмінності $\boldsymbol{K}$ у граничному стані, виходить $\dfrac{dK}{dl} < 0$.

В нестійкому стані рівноваги тріщина починає рухатися по досягненні навантаженням критичного значення, яке визначається з критерію руйнування. У закритичній області тріщина може розповсюджуватися при сталому навантаженні. Область нестійких станів рівноваги характеризується нерівностями

$$\frac{dP}{dl} < 0 \quad \text{, або } \frac{dK}{dl} > 0.$$

З точки зору попередження повного руйнування важливо знати, до якого виду відноситься граничний стан. Якщо він стійкий, то небезпеки миттєвого руйнування немає. Якщо ж він нестійкий, допускати таку тріщину не можна без подальшого більш детального аналізу Від виду граничного стану рівноваги залежить допуск на розмір початкової тріщини.

Висновки

1.У зв'язку з тим, що у вершині тріщини з'являється пластична зона, реальна довжина тріщини збільшується. Згідно з Ірвіном довжина тріщини визначається за формулою $2a = 2(a + r_p^*)$, де $\mathrm{r_p^*} = \dfrac{K_I^2}{2\pi\sigma_T^2}$. Величину r_P^* називають поправкою Ірвіна на пластичність. Поправку доцільно враховувати тільки для плоского наруженого стану. Згідно з Дагдейлом величину, на яку збільшується тріщина можно знайти за формулою $\rho = \pi K^2/(8\sigma_T^2)$.

2. Форма і розміри зони пластичних деформацій суттєво залежить від виду напруженого стану. Для плоскої дееформації ця зона менша у зв'язку з появою третього (стискаючого) головного напруження. Розмір пластичної зони по лінії $\theta = 0$ при плоскому наруженому стані можна визначити за формулою

$$r_{\text{п}} = \frac{K_1^2}{2\pi\sigma_{\text{T}}^2}.$$

Для визначення розмірів зони у інших напрямках (при $\theta \neq 0$) необхідно скористатися формулами Вестергардта і критеріями пластичності (формули 6.17).

3. Згідно з концепцією Грифітса-Ірвіна вводиться поняття інтенсивності вивільненої енергії G при зростанні тріщини. Зв'язок інтенсивності вивільненої енергії і коефіцієнта інтенсивності має вигляд для тріщини першого типу

$$G_I = \frac{1-\nu^2}{E}K_1^2 \text{ - для плоскої деформації,} \qquad (6.29)$$

$$G_I = \frac{1}{E} K_1^2 \text{ - для плоского напруженого стану}. \quad (6.30)$$

Аналогічно можна одержати відповідні залежності для тріщин II і III типу. Для тріщини загального виду

$$G = G_I + G_{II} + G_{III} = \frac{1-\nu^2}{E}\left(K_I^2 + K_{II}^2\right) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2. \quad (6.31)$$

4. Таким чином, маємо два альтернативних формулювання критерію руйнування. Тріщина буде розвиватися, якщо:

3. Інтенсивність енергії G, що вивільнюється, досягає критичного значення

$$G = d\Gamma / dS = G_c. \quad (6.32)$$

4. Коефіцієнт інтенсивності напруження K досягає критичної величини

$$K = K_c. \quad (6.33)$$

Тобто енергетичний критерій початку зростання тріщини має вигляд $G = G_C$. а силовий $K = K_C$..

5. Залежність між енергією ***G***, силою і податливістю зразка може бути використана для визначення потоку енергії ***G*** у вершину тріщини. Згідно з цією формулою (формула податливості Ірвіна) необхідно побудувати криву $\lambda(l)$ залежності податливості зразка від довжини тріщини і визначити похідну $\frac{d\lambda}{dl}$ (можна графічно по кривій $\lambda(l)$).Після цього потік енергії у вершину тріщини на одиницю товщини зразка обчислюється за формулою

$$G = \frac{1}{2} P^2 \frac{d\lambda}{dl}. \quad (6.36)$$

Якщо визначено величину G, можна знайти і КІН за формулами (6.29), (6.30).

Приклади розрахунку параметрів руйнування

Задача 1

Пластина шириною 2***b*** має центральну тріщину довжиною 2***l***, яка проходить по усій товщині пластини. Пластина розтягується напруженням $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{2tb}}$.

Переміщення точки прикладення сили $\Delta = \boldsymbol{\lambda P}$. K – тарировку, (тобто коефіцієнт форми $\boldsymbol{Y}(\frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{b}})$ у виразі для коефіцієнта інтенсивості) вважаємо одиницею. Знайти податливість $\boldsymbol{\lambda}$.

Розв'язання

Формула податливості Ірвіна $\boldsymbol{G=\frac{P^2}{2t}\frac{d\lambda}{dl}}$. Потік енергії $\boldsymbol{G=K^2/E}$, або з урахуванням коефіцієнта інтенсивності напружень $\boldsymbol{K=\sigma\sqrt{\pi l}}$,

$\boldsymbol{G=(\sigma^2\pi l)/E=\frac{P^2\pi l}{4t^2b^2E}}$. Прирівнюючи два вирази для потоку енергії

$$\boldsymbol{\frac{P^2}{2t}\frac{d\lambda}{dl}=\frac{P^2\pi l}{4t^2b^2E}\Rightarrow\frac{d\lambda}{dl}=\frac{\pi l}{2tb^2E}},$$

і розв'язуючи одержане диференційне рівнння відносно $\boldsymbol{\lambda}$, одержимо

$$\boldsymbol{\lambda=\pi l^2/4Etb^2}.$$

Задача 2 Врахування пластичної зони у вершині тріщини

Знайти коефіцієнт інтенсивності напружень $\boldsymbol{K_I}$ і нормальне напруження $\boldsymbol{p}$ у пластичних зонах для центральної тріщини у нескінченній пластині. Довжина пластичних зон $\boldsymbol{0.2l}$. У нескінченності прикладено напруження $\boldsymbol{\sigma_\infty}$ (рис.3.14).

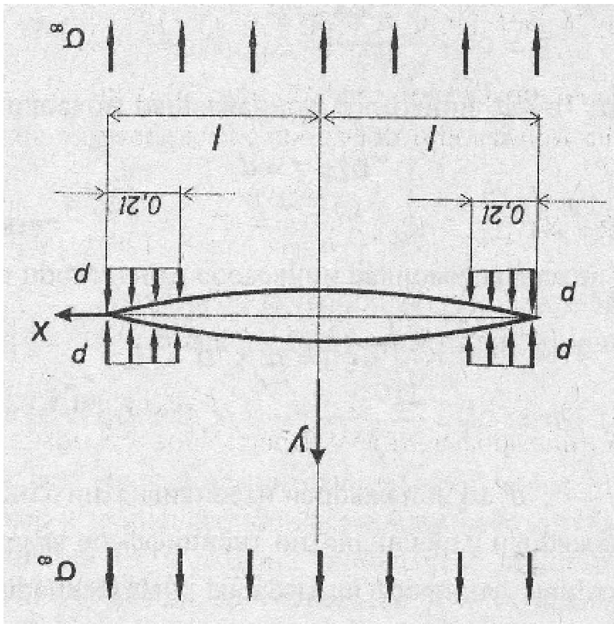


Рис. 6.15

У відповідності з Дагдейлом довжина тріщини збільшена на величини 0.2 $\boldsymbol{l}$ біля вершин тріщини. Коефіцієнт інтенсивності для тріщини довжиною 2$\boldsymbol{l}$

$$\boldsymbol{K_I=\sigma_\infty\sqrt{\pi l}}.$$

КІН від навантаження на береги тріщини напруженнями $\boldsymbol{p}$:

$$\boldsymbol{K_I=\frac{1}{\sqrt{\pi l}}\int_{-l}^{l}\sigma_y(x)\sqrt{\frac{l+x}{l-x}}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi l}}\left(\int_{-l}^{-0.8l}p\sqrt{\frac{l+x}{l-x}}dx+\int_{0.8l}^{l}p\sqrt{\frac{l+x}{l-x}}dx\right)}.$$

Після інтегрування одержимо

$$K_I = 1.3p\sqrt{\frac{l}{\pi}}.$$

Напруження σ_∞ буде руйнівним тоді, коли коефіцієнт інтенсивності від σ_∞ буде дорівнювати коефіцієнту інтенсивності напружень від p –

$$\sigma_\infty\sqrt{\pi l} = 1.3p\sqrt{\frac{l}{\pi}}, \text{ звідки } p = 2.42\sigma_\infty.$$

Вважаючи, що при плоскому напруженому стані напруження $p = \sigma_T$, одержимо граничне напруження

$$\sigma_\infty = \frac{\sigma_T}{2.42} = 0.41\sigma_T.$$

При дуже великій товщині пластині границя текучості зростає майже у три рази. Тоді $\sigma_\infty = 1.24\sigma_T$. Зазначимо, що цей результат є дуже наближеним, тому що пластична зона дуже відрізняється від форми пластичної зони при плоскому напруженому стані.

Задача 3

Пластина шириною $2b$=200мм розтягується напруженням $\sigma = 250$ МПа. Пластина має центральну тріщину довжиною $2l$=50мм. Границя текучості $\sigma_T = 350 МПа$. Визначити КІН з урахуванням пластичної зони у вершині і без врахування зони.

Розв'язання

Коефіцієнт інтенсивності напружень без врахування пластичної поправки: $K = \sigma\sqrt{\pi l}Y$. Скінченна ширина пластини враховується тарировочним коефіцієнтом $Y = \sqrt{\sec\frac{\pi l}{2b}}$. Обчислюючи K, одержимо

$$K = 200\sqrt{\frac{\pi 0.025}{0.924}} = 58 МПам^{1/2}.$$

Для врахування пластичної зони, залишаючись у рамках лінійної теорії руйнування, необхідно у використані вище формули підставляти замість довжини тріщини фіктивну величину, яка одержується добавкою до дійсної довжини фіктивної добавки, довжина якої дорівнює радіусу пластичної зони. Радіус пластичної зони для плоского напруженого стану $r_y = \frac{K^2}{2\pi\sigma_T^2} = 4.4\ мм$.

Якщо підставити сюди коефіцієнт інтенсивності напружень для пластини $K = \sigma\sqrt{\pi l}Y$, то ефективну довжину тріщини можна записати у вигляді $l_{еф} = \varphi l$, де φ – поправка Ірвіна

$$\varphi = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\sigma_T}\right)^2 = 1.16, \text{ тоді } l_{еф} = 1.16 \cdot 25 = 29 мм.$$

Відповідно $K=\sigma\sqrt{\dfrac{\pi l_{еф}}{cos\dfrac{\pi l_{еф}}{2b}}}=63.7\ МПа\sqrt{м}$.

Як видно КІН з урахуванням поправки Ірвіна виявився більшим ніж без поправки.

Задача 4

Деталь виготовлено з алюмінієвого сплаву з характеристиками $\sigma_b=560МПа, \sigma_{o.2}=300МПа$, $K_{IC}=18МПа\sqrt{м}$. Напруження розтягу в деталі $\sigma_p=100МПа$, ширина деталі $2b=10см$. Визначити допустиму довжину одиночної крайової тріщини при запасі міцності $n=2$.

Розв'язання

Коефіцієнт інтенсивності $K_I=\sigma\sqrt{\pi l}Y$, де Y – тарировочний коефіцієнт. Для крайової тріщини у достатньо широкій пластині можна прийняти $Y=1.12$. Умова міцності по Ірвіну $K_I\le K_{IC}$. Підставимо у ліву частину нерівності коефіцієнт інтенсивності $K_I=\sigma\sqrt{\pi l}Y$ з урахуванням $\sigma=n\sigma_p$, тоді одержимо $n\sigma_p\sqrt{\pi l}Y\le K_{IC}$. З цієї нерівності одержимо допустиму довжину тріщини

$$l=(\frac{K_{IC}}{Y\sigma_p n})^2=3\text{ мм.}$$

Якщо враховувати пластичну зону, необхідно збільшити довжину тріщини на величину радіуса пластичної зони. Радіус пластичної зони знаходимо за формулою $\dfrac{r_y}{l}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\sigma_c}{\sigma_{0.2}})^2$ (див. попередню задачу). Ефективна довжина тріщини

$$l=l_{еф}=l_0+r_y=l_0(1+0.5(\frac{\sigma_c}{\sigma_{0.5}})^2)\ .$$

Допустима довжина тріщини $2l_0=\dfrac{2l}{1+0.5(\dfrac{\sigma}{\sigma_{0.5}})^2}=5.6\ мм.$

Задача 5

На кінцях консолей двоконсольної балки (ДКБ – зразка) діють сили, які розкривають тріщину між верхньою і нижньою консолями. Розміри поперечного перерізу $h\times t$. Визначити питому роботу руйнування 2γ .

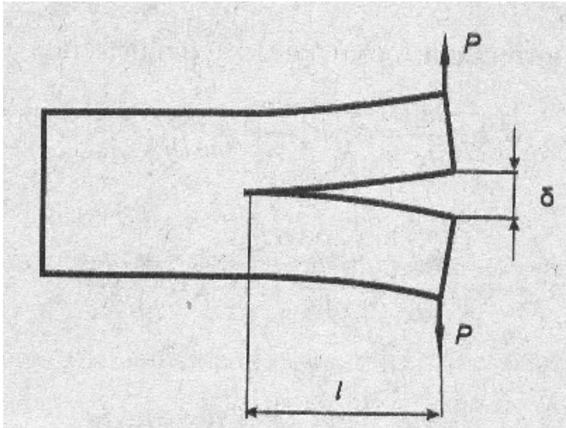


Рис.6.16

Розв'язання

Потенційна енергія ДКБ зразка: $U = W - P\Delta = -P\Delta/2$, де Δ – збільшення відстані між точками прикладення сил у результаті згинання консолей. Розкриття тріщини по лінії дії сил

$$\Delta = \frac{2}{3}\frac{Pl^3}{EJ}.$$

Потенційна енергія зігнутої балки

$$U = -P\frac{\Delta}{2} = -\frac{1}{3}\frac{P^2l^2}{EJ}.$$

Варіація потенційної енергії обумовлена зміною довжини тріщини

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial l}dl = -\frac{P^2l^2}{EJ}\delta l.$$

Варіація енергії руйнування, обумовлена варіацією довжини тріщини

$$\delta\Gamma = 2\gamma t\delta l$$

Рівняння енергетичного балансу у зв'язку з розвитком тріщини

$$\delta\Gamma + \delta U = 0, \ \text{або}\ 2\gamma t\delta l - \frac{P^2{}_{\max}l^2}{EJ}\delta l,$$

де $P_{\max}$ – сила у момент початку розвитку тріщини.

Звідси знаходимо питому роботу руйнування

$$2\gamma = \frac{P_{\max}^2 l^2}{Et^2h^3}.$$

Лекція 7 Елементи нелінійної механіки руйнування

7.1 J-інтеграл

Якщо характерний розмір пластичної зони у вершині тріщини перевищує більш ніж 20% довжину тріщини, то поняття коефіцієнта інтенсивності напружень втрачає смисл (оскільки побудовано на формулах теорії пружності) і задачу аналізу тріщини необхідно розглядати з позиції теорії пластичності.

Конфігурація зони пластичних деформацій відповідає картині розподілення дотичних напружень у точках об'єму біля тріщини.

Для описання характеристик тріщиностійкості у цьому випадку використовуються такі параметри як J-інтеграл і розкриття у вершині тріщини COD (Crack Opening Displacement).

J (джей) – інтеграл запропоновано Д.Райсом (1968р.), незалежно від нього аналогічний параметр було запропоновано Черепановим Г.Н. (1967р.) (Г – інтеграл)

Черепанов проаналізував стан області ***D*** біля тріщини з точки зору закону збереження енергії (рис. 7.1).

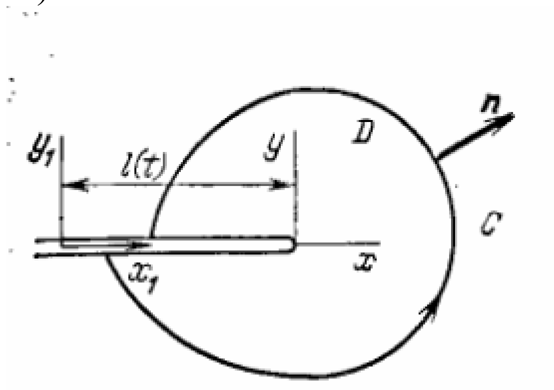


Рис.7.1

Робота зовнішніх сил і теплова енергія, які поступають через контур С (на берегах тріщини обміну енергії не відбувається) витрачаються на збільшення кінетичної енергії, потенціальної енергії деформації і на руйнування. Поглинається енергія у вершині тріщини. Вважається, що кількість енергії, що підводиться до тріщини, не залежить від форми контура С.

Інтеграл Черепанова має вигляд

$$\Gamma = \frac{d\Pi}{dl} = \int_C ((W + K)\cos\alpha - (p_x \frac{du}{dx} + p_y \frac{dv}{dy}))ds, \qquad (7.1)$$

де W – питома енергія деформацій, K – питома кінетична енергія, p_x, p_y - проекції сил, діючих на контур, на осі x, y; α – кут між нормаллю до контура і віссю z (лінією тріщини), С – контур інтегрування.

Інтегрування починається з нижньої поверхні надрізу проти годинникової стрілки і закінчується на верхній поверхні тріщини.

J – інтеграл Райса одержимо з Г-інтеграла, якщо нехтувати кінетичною енергією K.

Райс показав, що J-інтеграл не залежить від шляху інтегрування для ідеально пружного матеріалу, і матеріалу, який відповідає деформаційній теорії пластичності.

Інваріантність інтеграла дозволила прийняти його як критерій початку руйнування. Тріщина починає рости коли інтеграл J досягає граничного значення J_C.

Разом з тим, складність визначення критичних значень, обмеженість використання J тільки для тонких зразків (плоский напружений стан) ставлять суттєві обмеження для його використання. J–інтеграл перестає бути інваріантним для тривимірних, осесиметричних і температурних задач, задач з об'ємними силами, пружно-пластичних задач на основі теорії текучості.

Розглянемо зв'язок J-інтеграла з інтенсивністю напружень при маломасштабній текучості. Нехай у об'ємі є розріз або тріщина. У вершині цієї тріщини виникають пластичні деформації. Під дією сил, прикладених до пластини, має місце плоска деформація. Напруження в околі тріщини можна оцінити за допомогою розв'язку Вестергардта

$$\sigma_{ij} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta). \tag{7.2}$$

В результаті обчислення інтеграла (7.1) з урахуванням асимптотичного зменшення напружень при віддаленні від початку координат, одержимо

$$J = \left[(1-\nu)^2 / E\right] K_1^2. \tag{7.3}$$

Для нескінченної пластини з розрізом $2l$ під дією рівномірно розподілених напружень σ_∞ можна вважати, що $K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi l}$. Тоді, після підстановки K_I, одержимо

$$J = \left[\pi\left(1-\nu^2\right)/E\right]\sigma_\infty^2 l. \tag{7.4}$$

Для плоского напруженого стану замість $(1-\nu^2)$ необхідно підставити одиницю.

Якщо поле напружень таке, що існують усі три види деформацій тріщини, то при невеликій зоні текучості ***J***-інтеграл можна записати як суму

$$J = \frac{1-\nu^2}{E}\left(K_I^2 + K_{II}^2\right) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2, \tag{7.5}$$

що співпадає з формулою для інтенсивності вивільнення енергії ***G.***

При зміні довжини тріщини ***J***-інтеграл можна записати через похідну інтенсивності вивільненої енергії по відношенню до довжини тріщини.

$$J = -\frac{\partial \Gamma}{\partial l}, \tag{7.6}$$

тобто можна вважати, що ***J***-інтеграл має смисл інтенсивності вивільнення пружної енергії ***G***, а також пов'язаний з інтенсивністю напружень ***K*** у вершині тріщини. Зв'язок ***J***-інтеграла з інтенсивністю вивільнення пружної енергії дозволяє узагальнити метод податливості на матеріали з нелінійними характеристиками. Для нелінійно-пружного матеріалу параметр ***J*** характеризує зміну потенційної енергії, пов'язану зі зміною довжини тріщини, тобто його можна розглядати як енергію, необхідну для зростання тріщини.

Зазначимо, що ***J***-інтеграл має смисл, якщо навантаження змінюється так, що в точках об'єму не відбувається розвантаження, тобто навантаження монотонне. Розвантаження, яке має місце на поверхнях тріщин, що утворюється при зростанні тріщини, порушує цю монотонність, оскільки на утворених поверхнях напруження зменшується до нуля.

Результати експериментальних досліджень показують,що існує граничне значення J_C, яке відповідає руйнуванню і не залежить від конфігурації зразка. Таким чином ***J***-інтеграл можна застосовувати при формулюванні критерію руйнування: тріщина починає розвиватися коли J -інтеграл досягає критичного значення J_C:

$$J = J_{1C}. \tag{7.7}$$

Граничне значення J позначено J_{1C} (аналогічно K_{1C}) і може використовуватися при плоскій деформації. J-інтеграл, як і коефіцієнт інтенсивності K_{1C} є параметром, що описує руйнування, але для нелінійно пружних тіл при відсутності розвантаження.

7.2. Критичне розкриття тріщини (КРТ)

Уеллс, Коттрел і Баренблат [1] незалежно запропонували критерієм руйнування при значних пластичних деформаціях вважати величину розкриття тріщини у вершині. Вважалося при цьому, що розвиток тріщини починається тоді, коли вона збільшується до деякого критичного значення, яке відповідає мікроруйнівному процесу. Таким чином ця оцінка потребує визначення величини переміщень точок у вершині тріщини у напряму, перпендикулярному тріщині.

Припустимо, що біля вершини тріщини є пластична зона розміром r_P. Розкриття тріщини $\delta = 2v$, яка має довжину $2(1 + r_P)$, визначається як переміщення точки на осі x, яка лежить на відстані $r = r_P$ від умовної вершини тріщини, тобто розкриттям у точках $\pm l$.

Використовуючи асимптотичну формулу Колосова-Вестергардта,

$$v = \frac{K_1}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2 - 2\nu - \cos^2\frac{\theta}{2}\right),$$

зв’язок переміщень v, (перпендикулярних поверхні тріщини) з коефіцієнтом інтенсивності K можна одержати у вигляді

$$v = \frac{2K_I}{E'}\sqrt{\frac{2r_P}{\pi}}, \tag{7.8}$$

де ($E' = E$ при плоскій деформації; $E' = E \Big/ \left(1 - \nu^2\right)$ при плоскому напруженому стані)

Якщо скористатися значенням радіуса, одержаного Ірвіном для плоского напруженого стану ($r_P^* = \dfrac{\sigma^2 l}{2\sigma_T^2}$), можна одержати

$$\delta = 2v = \frac{4K^2}{\pi E' \sigma_T}. \tag{7.9}$$

Якщо далі скористатися залежністю між інтенсивністю енергії, що вивільнюється і коефіцієнтом інтенсивності напружень $G = \frac{1-v^2}{E} K_I^2$, одержимо

$$K^2 = E'G. \tag{7.10}$$

З врахуванням попередньої формули для δ, після перетворень одержимо

$$G = (\pi / 4)\sigma_T \delta \approx \sigma_T \delta. \tag{7.11}$$

Величину δ називають розкриттям тріщини у вершині. Цей параметр використовують для того, щоб описати умови руйнування при великих пластичних деформаціях.

Далі уточненням цієї моделі займалось багато вчених, зокрема Дагдейл (1960 р.). У моделі Дагдейла (див. Лекцію 6) передбачалася наявність пластичної зони з напруженнями $\sigma = \sigma_T$ трикутної форми (рис. 7.2). Дійсна довжина тріщини з вільними від напружень поверхнями має довжину $2b$. Ділянка довжиною $b - l$ відповідає пластичній області біля вершини тріщини, у якій діють поверхневі сили (напруження), які дорівнюють границі текучості σ_T.

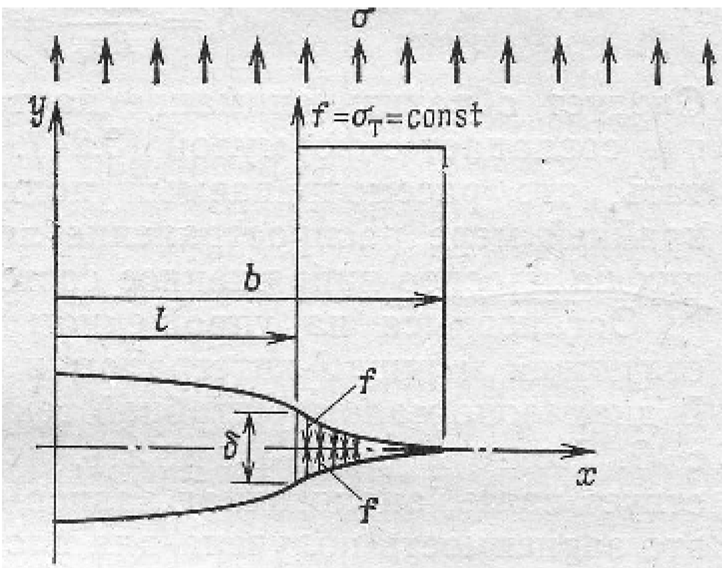


Рис.7.2. Модель Дагдейла

Довжину пластичної зони Дагдейл одержав у вигляді

$$b - l = l\{\sec(\pi\sigma/2\sigma_T) - 1\}.$$

Параметр розкриття тріщини визначається формулою (М.Сираторі, с.63)

$$\delta = 2\nu = \frac{8\sigma_T l}{\pi E}\ln\left(\sec\frac{\pi\sigma}{2\sigma_T}\right). \tag{7.12}$$

У розробці цього питання також приймали участь Билба, Коттрел [1]. Розроблена ними модель одержала назву БКС-модель, або ДБКС-модель, згідно з якою при плоскому напруженому стані

$$\delta \approx \frac{\pi\sigma^2 l}{E\sigma_T} = \frac{G}{\sigma_T}. \tag{7.13}$$

(Цей результат одержується, якщо розкласти в ряд Тейлора множник $\ln\left(\sec\frac{\pi\sigma}{2\sigma_T}\right)$ у попередній формулі для δ). (Формула (7.12) також співпадає з (7.13), яку одержано з енергетичних міркувань).

В діапазоні невеликої пластичності J-інтеграл співпадає з G. Тоді між розкриттям тріщини і J-інтегралом в цьому діапазоні існує залежність

$$J = m\sigma_T\delta, \tag{7.14}$$

де m – параметр, який залежить від виду напруженого стану. При плоскому напруженому стані m=1, при плоскій деформації m >1, а саме $m \approx \sqrt{3}$.

У загальному вигляді співвідношення між δ і J-інтегралом ще не одержано.

Використання критерію ***КРТ*** базується на припущенні, що руйнування починається, коли розкриття тріщини у вершині досягає критичного значення $\delta = \delta_C$, характерного для даного матеріалу.

Докладно про проблеми, що виникають при використанні параметрів руйнування при великих пластичних деформаціях, і про методи їх визначення можна прочитати у згадуваній вище книжці М.Сираторі. Зазначимо тільки, що використання цих критеріїв тісно пов’язано з методами їх експериментального визначення, про що мова у наступній лекції.

7.3. Зв'язок силового, деформаційного і енергетичного критеріїв механіки руйнування

Отже, ми розглянули три класичні параметри, які характеризують умови настання руйнування в різних умовах. Вище було показано, що в пружній області коефіцієнт інтенсивності напружень і ***J***-інтеграл однозначно є пов'язані з інтенсивністю вивільнення пружної енергії. При цьому виявлений безпосередній зв'язок між КІН і ***J***-інтегралом у вигляді

$$J = \left[\left(1 - \upsilon^2 \right) \big/ E \right] K_I^2. \qquad \textbf{(7.15)}$$

Між ***J***-інтегралом і розкриттям тріщини при маломасштабній текучості можна використовувати залежність

$$J = m\sigma_T \delta. \qquad (7.16)$$

Тут m – параметр, залежний від пластичного стиснення. При плоскому напруженому стані $m = 1$, а при плоскій деформації $1 < m < 3$.

В діапазоні повномасштабної текучості залежність між ***J*** і COD витікає з моделі Дагдейла і має вигляд

$$J = \sigma_T \delta. \qquad (7.17)$$

Таким чином, в пружній області існує однозначний зв'язок між трьома основними параметрами механіки руйнування. Знаючи один із них, завжди можна обчислити два інших.

Лекція 8 Вплив різних факторів на розвиток тріщин

8.1 Уповільнене руйнування.

До числа найпоширеніших причин руйнування конструкцій відноситься поступове зростання невеликих початкових тріщин аж до досягнення ними критичної довжини. Відбувається так зване уповільнене руйнування в умовах невисоких робочих напружень, яке закінчується катастрофічним крихким руйнуванням, зрозуміло, якщо вчасно не проведена зупинка і своєчасний ремонт конструкції. Зазначимо, що період експлуатації конструкції з тріщиною, яка розвивається, займає суттєву частину її життя до руйнування .

Зрозуміло, механізми виникнення тріщини різні для різних матеріалів, навантажень, умов експлуатації і т.д. До найпоширеніших видів уповільненого руйнування відносяться, наприклад, втомне руйнування при дії агресивних середовищ, в умовах повзучості, Центральне місце в усіх дослідженнях уповільненого руйнування повинно займати вивчення зростання тріщин, оскільки саме вони викликають велику концентрацію напружень, яка активізує усі процеси початку руйнування. Відзначимо, що на початкової стадії процесу руйнування майже завжди спостерігається поступова поява і накопичення мікродефектів, розміри яких можна порівняти з характерними розмірами мікроструктури (наприклад, величиною зерна). Такий період, що називається періодом зародження тріщини або інкубаційним періодом, закінчується локалізацією процесу розсіяного руйнування з появою макротріщини, що зростає. Якщо в тілі був надріз, то інкубаційним періодом буде період від прикладення навантажень до початку руху тріщини. Часто основну частину часу життя виробу займає не інкубаційний, а подальший період повільного квазістатичного підростання тріщини від початкового до критичного розміру.

8.2 Зростання втомних тріщин

Відома крива Велера пов'язує напруження з числом циклів до руйнування, що дозволяє зробити висновок про довговічність елемента конструкції. Проте у ній не міститься інформації про повільний розвиток тріщин в цьому процесі, хоча саме підростання втомних тріщин до критичного розміру і веде до руйнування елементів циклічно навантажених конструкцій. Необхідно розрізняти звичайне втомне руйнування при низькому рівні напружень або так звану багатоциклову втому і руйнування за порівняно невелике число циклів при достатньо високих напруженнях, – малоциклову втому. В першому випадку мікропроцеси руйнування локалізуються в малій зоні біля вершини тріщини і визначаються асимптотичними полями напружень і деформацій, а, отже, швидкість руху тріщини повинна залежати від коефіцієнтів інтенсивності напружень. В другому ж випадку зона пластичних деформацій не є малою, і для описання процесу розвитку тріщини потрібно розглядати послідовність кроків навантаження і підростання тріщин. В даному параграфі розглянемо багатоциклову втому. Важливою є оцінка довговічності за кількістю циклів змінного навантаження на стадії зростання тріщини (тобто визначення кількості циклів при збільшенні довжини тріщини від початкового значення l_0 до критичного l_C). З теоретичної точки зору вивчення параметрів, відповідальних за процес зростання тріщини дозволяє глибше вникнути в механічну природу процесів, що відбуваються у вершині тріщини. З практичної точки зору оцінка довговічності важлива, наприклад, при розрахунку ресурсу виробів. Досить довго для оцінки швидкості зростання втомних тріщин використовувалися емпіричні формули, в які не входили характеристики механіки руйнування. Тільки введення в число параметрів, впливаючих на розповсюдження тріщини, коефіцієнта інтенсивності напружень дозволило зробити висновки щодо загальних закономірностей зростання тріщини при повторному (циклічному) навантаженні. І це природно, оскільки зростання втомної тріщини відбувається на фоні пружних деформацій, коли справедливі критерії лінійної механіки руйнування. З урахуванням цього було отримано досить багато різних залежностей для швидкості росту тріщини. Практично усі вони випливають з формули П. Паріса (1965 р.), основа якої – твердження, що всі явища у вершині тріщини, а також і швидкість dl/dN її розповсюдження залежать від коефіцієнта інтенсивності напружень. Ця формула записується в такому вигляді:

$$\frac{dl}{dN} = A(\Delta K)^n. \tag{8.1}$$

Тут A, n — емпіричні коефіцієнти, $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ розмах коефіцієнта інтенсивності напружень за один цикл навантаження, N — кількість циклів. Численні експериментальні дослідження добре підтверджують цю формулу, причому показник степеня n для різних матеріалів знаходиться в інтервалі від 2 до 7 (частіше всього $n = 4$). Чим більш крихкий стан матеріалу спостерігається при випробуванні, тим більше показник степеня n. З приводу своєї формули сам Паріс пізніше писав: «Цікаво, що так простий закон здатний описати дані для матеріалів з різко відмінною мікроструктурою! Мабуть, механізм зростання тріщини для усіх їх один і той же незалежно від особливостей мікроструктури матеріалу». Формула Паріса описує середню (лінійну) ділянку повної діаграми втомного руйнування, яка у більшості випадків має S-образний вигляд (рис. 8.1).

Відхилення діаграми від цієї форми звичайно пов'язано з непростими умовами навантаження (активні середовища). Для описання повної діаграми втомного руйнування пропонується, наприклад, вираз

$$\frac{dl}{dN} = C_0 \left(\frac{K_{\max} - K_{th}}{K_C - K_{\max}} \right)^q, \tag{8.2}$$

де C_0, q – емпіричні величини, K_{th} — пороговий коефіцієнт інтенсивності напружень*, K_C — в'язкість руйнування.

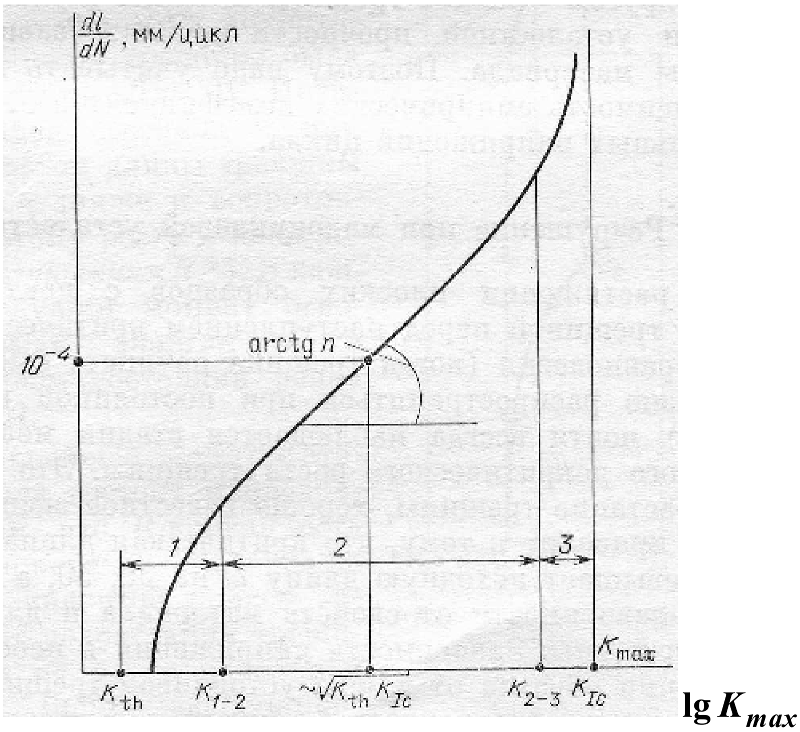


Рис. 8.1 Діаграма втомного руйнування в логарифмічних координатах (схема); 1,3 — області низьких і високих швидкостей зростання тріщини; 2 — область справедливості формули Паріса

Передбачається, що якщо $K_{\max} \le K_{th}$, то тріщина не росте. Формули (8.1) і (8.2) застосовуються як для звичайної (багатоциклової) втоми, так і для малоциклової втоми. Зрозуміло, це зручно, але в то ж час необхідно проявляти обережність при поводженні з емпіричними коефіцієнтами. Річ у тому, що закономірності механізму втомного явища різні при малоцикловій і багатоцикловой втомі. При цьому в одному випадку тріщина йде по тілу зерна, в іншому — по його границі. У такому разі характеристики втомної міцності повинні залежати від структури матеріалу. Також треба враховувати можливу залежність емпіричних коефіцієнтів від рівня максимальних напружень циклу.

8.3 **Руйнування при малоцикловій втомі**

При розтягуванні плоских зразків з центральною наскрізною тріщиною перед настанням критичного стану рівноваги (коли тріщина починає швидко лавиноподібно розповсюджуватися при сталому зовнішньому навантаженні) майже завжди спостерігається стадія повільного стійкого докритичного зростання тріщини. Це повільне підростання тріщини, добре відоме експериментаторам, призводить до того, що критична довжина тріщини перевищує початкову довжину на 30, 50, а то і на 100 % залежно від властивостей матеріалу і довжини початкової тріщини. Залежність напруження в неослабленому перетині зразка від довжини стійкої тріщини прийнято називати докритичною діаграмою руйнування.

Докритична діаграма руйнування є характеристикою матеріалу даної товщини, яка оцінює здатність матеріалу гальмувати тріщину. Ця діаграма відображає процес руйнування, тоді як на звичайних діаграмах деформації стадія руйнування відмічається тільки координатами кінцевої точки. Цієї інформації недостатньо для оцінки такої важливої стадії процесу опору матеріалу дії зовнішнього навантаження, як стадія руйнування. Зупинимося коротко на існуючих теоріях докритичного зростання тріщини. Перша спроба математичного описання докритичного зростання тріщини була зроблена Дж. Р. Ірвіном. Ідея полягала в тому, що із зростанням довжини тріщини змінюється також і опір цьому зростанню у вигляді роботи руйнування. В кожний момент енергія $\boldsymbol{G}$, що звільняється, у стійкому стані рівна роботі руйнування $\boldsymbol{R}$.

Подальший розвиток цього методу полягає в припущенні, що $\boldsymbol{R}$-крива є характеристикою матеріалу, причому вид цієї кривої залежить від підростання тріщини (але не від її початкової довжини). Робота руйнування $\boldsymbol{R}$ вимірюється роботою, яку треба затратити для просування тріщини на одиницю довжини у зразку даної товщини $\boldsymbol{t}$. Можна помітити, що $\boldsymbol{R}$ відрізняється від відомої інтенсивності роботи руйнування (або в'язкості руйнування) $2\gamma = G$, оскільки остання визначається у момент початку швидкого розповсюдження тріщини. При цьому справедливою є нерівність $0 \le R \le 2\gamma l$. Вважається, що R-крива є характеристикою матеріалу, причому вид цієї кривої залежить від підростання тріщини, а не від початкової її довжини. Форма експериментальної $\boldsymbol{R}$-кривої визначає характер докритичного зростання тріщини.

На рис. 8.2 показано, як по $\boldsymbol{R}$-кривій можна отримати докритичну діаграму руйнування або, навпаки, як за відомою діаграмою руйнування отримати питому енергію руйнування як функцію приросту довжини тріщини. За відомою $\boldsymbol{K}$-тарировкою $\left(K_I = \sigma\sqrt{l}\cdot Y\left(\frac{l}{b}\right)\right)$ і формулою $G = \frac{1}{E}K_I^2$ будуємо для кожного фіксованого значення σ криву $G = G(\sigma, l) = \sigma^2 l Y^2\left(\frac{l}{b}\right)/E$.

(У випадку тріщини Гріффітса в необмеженій пластині це буде пряма $G = \sigma^2 \pi l / E$).

Перетин кривої G з R-кривою:

$$G(\sigma, l) = R(l - l_0)$$

визначає підростання тріщини при даному значенні σ.

Критичний стан наступає при такому σ_C, для якого G - крива торкається R-кривої. Умова торкання $\frac{dG}{dl} = \frac{dR}{dl}$ визначає критичну довжину l_C тріщини.

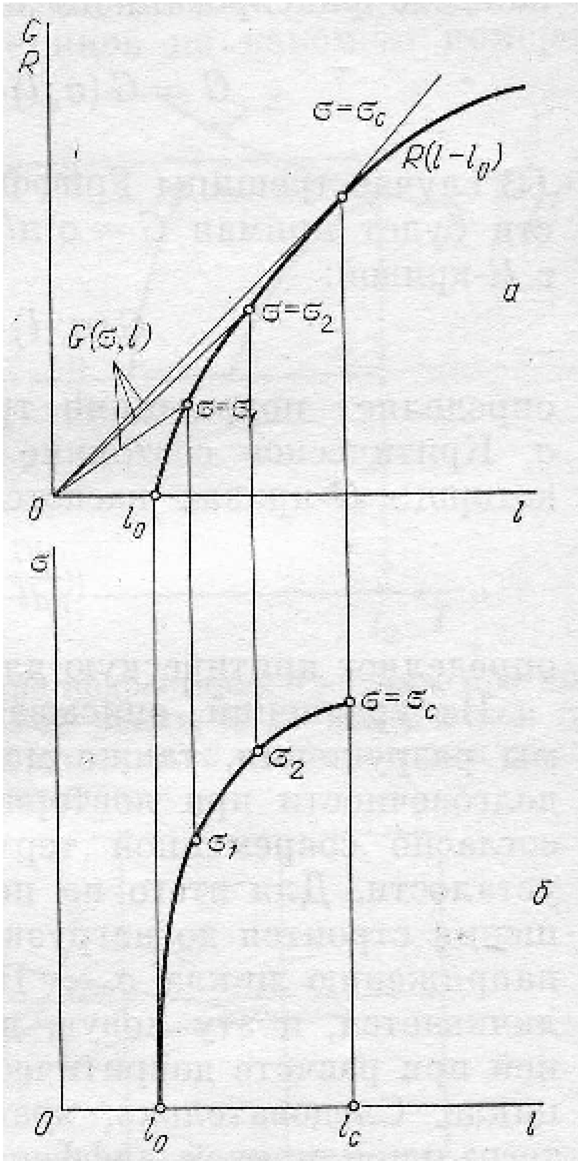


Рис.8.2 Зв’язок $\boldsymbol{R}$ - кривої (а) з докритичною діаграмою руйнування (б)

З рівнянь, що описують докритичні діаграми руйнування, також можна отримати характеристики довговічності при повторному статичному навантаженні, або згідно з сучасною термінологією, при малоцикловій втомі. Для цього на першому циклі діаграма руйнування будується до навантаження, відповідаючого максимальному напруженні циклу $\boldsymbol{\sigma}_{\max}$. При цьому довжина тріщини збільшується, і цю нову довжину слід вважати початковою при розрахунку докритичої діаграми на наступному циклі. Отже, крайова умова для розрахунку інтегральної кривої диференціального рівняння докритичної діаграми руйнування на $\boldsymbol{i}$-му циклі буде $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{\min}$ при $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}_{i-1}$ $(\boldsymbol{i} = 1, 2, ...)$. Сімейство докритичних діаграм руйнування в області зміни напружень циклу від $\boldsymbol{\sigma}_{\min}$ до $\boldsymbol{\sigma}_{\max}$ дозволяє розрахувати довжину тріщини в залежності від кількості циклів. Враховуючи ідеалізацію моделі і появу залишкових стискаючих напружень при розвантаженні, слід вважати, що при знятті навантаження (і зменшенні відстані між поверхнями тріщини) приріст тріщини також зменшується. Таким чином, якщо приріст довжини тріщини на і-м циклі згідно з докритичною діаграмою руйнування складе величину Δl_i, то довжина тріщини на i + 1-у циклі буде $l_{i+1} = l_i + \alpha \cdot \Delta l_i$ (рис.8.3). Коефіцієнт зниження приросту довжини $\alpha < 1$ визначається емпірично за експериментальними кривими $l - N$ для даного матеріалу даної товщини. Не виключено, що цей коефіцієнт змінюється з довжиною тріщини, тобто із зростанням числа циклів. За кожний цикл одержуємо певний приріст довжини тріщини, і врешті-решт на якомусь номері циклу діаграма руйнування досягне кривої критичних навантажень, внаслідок чого відбудеться швидке лавиноподібне руйнування сталому напруженні.

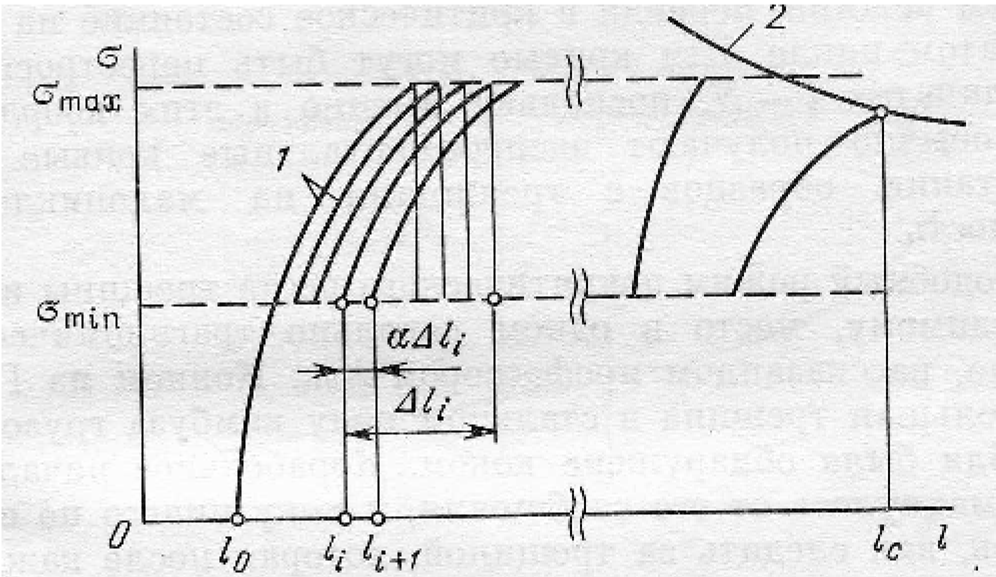


Рис. 8.3. Схематичне зображення підростання тріщини при циклічному навантаженні від початкової довжини l_0 до критичної l_C;
1 — докритичні діаграми руйнування, 2 — критична діаграма руйнування

8.4 Розрахунок елементів конструкцій на втомну довговічність

Розглянемо умови, які визначають довговічність елемента конструкції на стадії розвитку тріщини. Як вказувалося вище, кількість циклів, що відповідає зростанню тріщини від початкової довжини l_0 до критичної l_C, визначає довговічність даного елемента конструкції за числом циклів. Щоб забезпечити міцність конструкції довговічність повинна бути більше кількості змін заданого навантаження. Таким чином, разом з оцінкою матеріалу за класичною кривою Велера, суттєву інформацію про поведінку елемента конструкції з тріщиною в умовах втоми повинна дати механіка руйнування. Отже, в даному випадку, як завжди, треба виходити з того, що початковий тріщиноподібний дефект існує в конструкції з моменту початку її існування. Кількість циклів, за які з'являється тріщина, досить невизначена, що схематично показано на рис. 8.4 (область ***I***). Ці початкові дефекти можуть бути дислокаціями, мікротріщинами, порами і іншими порушеннями структури, визначення яких утруднено. Область ***II*** відповідає дефектам, які можуть бути виявлені інженерними методами (конкретна величина дефекту, що знаходиться, залежить від точності апаратури). У цій області розміщується межа, яка відділяє зону початкових тріщин від тих, що розповсюджуються. Для області ***III*** зростання тріщини спостерігається візуально.

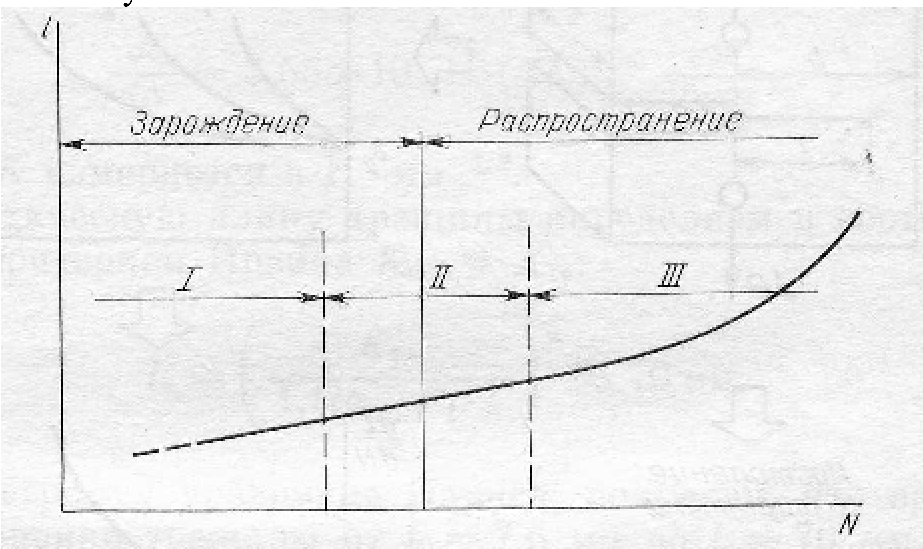


Рис.8.4. Схематичне зображення зародження і розповсюдження тріщини

Рекомендується дотримуватися такого порядку розрахунку на довговічність за числом циклів у зв'язку зі зростанням тріщини:

1. Виявити на основі кількісної оцінки можливостей дефектоскопічного контролю максимальну довжину (глибину) початкової тріщини, існуючої в еле-елементі конструкції, і підібрати відповідну формулу для коефіцієнта інтенсивності напружень $\boldsymbol{K}$ з урахуванням геометричної форми елемента конструкції з тріщиною.

2. За в'язкістю руйнування $\boldsymbol{K_C}$ і номінальному експлуатаційнійному (розрахунковому) напруженні $\boldsymbol{\sigma}_{\max}$ в перетині тріщини знайти (за критерієм Ірвіна $\boldsymbol{K} \le \boldsymbol{K_C}$) критичну довжину тріщини $\boldsymbol{l_C}$.

3. Розрахувати розмах циклу $\Delta\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_{\max} - \boldsymbol{K}_{\min}$ за відомим напруженням циклу $\boldsymbol{\sigma}_{\max,}\boldsymbol{\sigma}_{\min}$. З лабораторних випробувань на втому визначаються значення сталих матеріалу в співвідношеннях (8.1) або (8.2) для циклічної швидкості росту тріщини ***dl/dN***. Схему, ілюструючу отримання емпіричної залежності для ***dl/dN*** за наслідками експерименту, приведено на рис. 8.5.

5. Відповідно до вимог, що пред'являються до даного елемента конструкції, вирішити одну із наступних задач прогнозування зростання втомної тріщини:

а) визначити криву зростання тріщини $l-N$ в елементі конструкції ;
б) знайти, інтегруючи рівняння (8.1) або (8.2), кількість циклів (циклічну довговічність), за яку відома початкова тріщина або дефект l_0 в елементі конструкції досягне критичної (заданої) величини l_C .

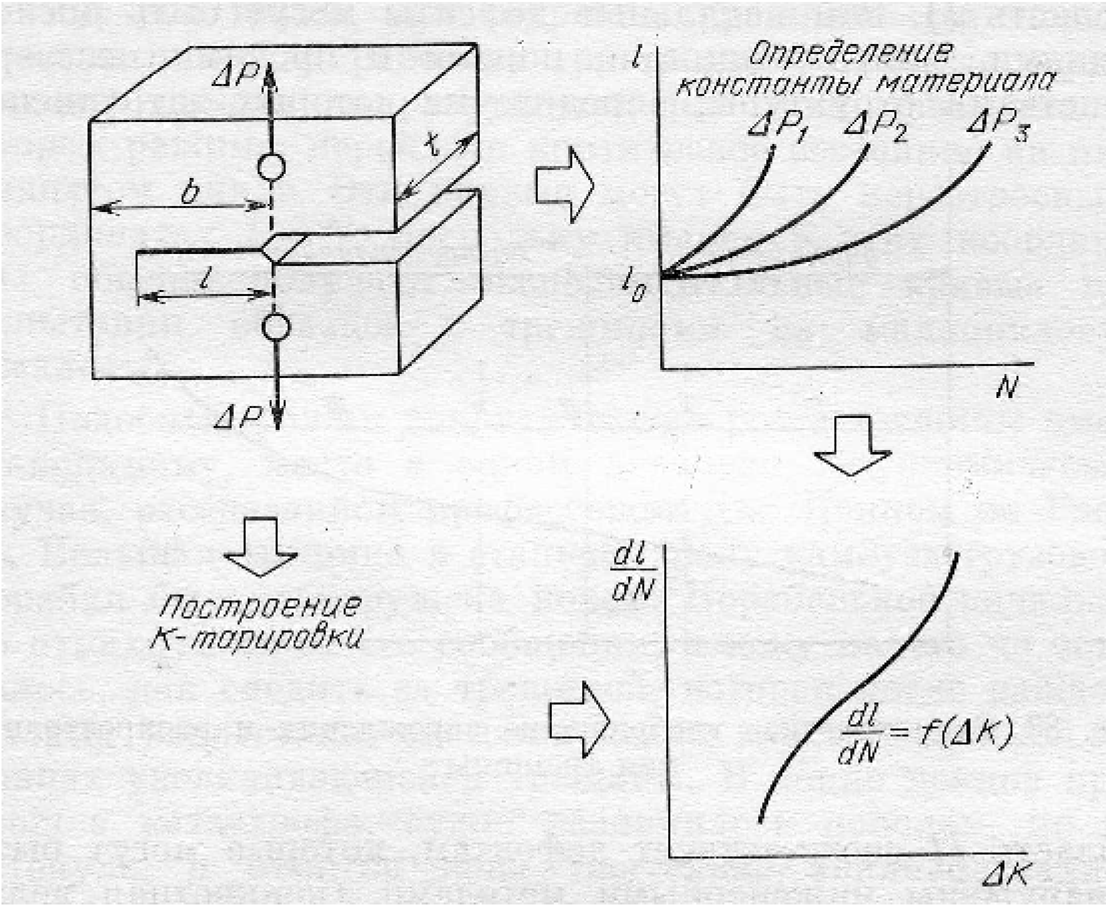


Рис.8.5 Схематичне зображення послідовності одержання швидкості $\dfrac{dl}{dN}$ за результатами експерименту

Розглянемо приклад розрахунку на довговічність за числом циклів. Пластина з однією краєвою тріщиною знаходиться в умовах циклічного розтягу. В цьому випадку розмах коефіцієнта інтенсивності напружень дорівнює $\Delta K = 1.12\Delta\sigma\sqrt{\pi l}$. Матеріал пластини – сталь ($\sigma_T = 700\ H/мм^2$, $K_{1C} =$ 5300 $H/мм^{3/2}$). Початкова довжина тріщини $l_0 = 7.6\ мм$; параметри циклу навантаження

$$\sigma_{\max} = 320H/мм^2, \sigma_{\min} = 175H/мм^2, \Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = 145H/мм^2.$$

Припустимо, що за результатами втомних випробувань зразків з даної сталі за формулою Паріса одержано залежність для швидкості руху тріщини у вигляді

$$\frac{dl}{dN} = 3.553\cdot10^{-13}\cdot\left(\Delta K\right)^{2.95}\frac{мм}{цикл},$$

якщо ΔK вимірюється в $H \cdot мм^{-3/2}$. Критичну довжину тріщини визначаємо в відповідності з критерієм Ірвіна $K_{\max} = K_{1C}$; ($K_{IC} = 1.12\sigma_{\max}\sqrt{\pi l}$).

$$l_C = \left(\frac{K_{1C}}{1.12\sigma_{\max}\sqrt{\pi}}\right)^2.$$

Інтегруючи рівняння Паріса $\frac{dl}{dN} = A(\Delta K)^n$, одержуємо, що на розповсюдження тріщини від l_0 = 7,6 мм до l_C = 70 мм потрібно біля 50 000 циклів. Якщо буде потрібно, щоб конструкція витримала, наприклад, 100 000 циклів, то у розпорядженні конструктора є наступні шляхи забезпечення даної довговічності:

1. Збільшити критичну довжину тріщини l_C, застосувавши матеріал з більш високим значенням K_{1C} або понизити розрахункове напруження $\sigma_{\max}$.
2. Зменшити розмах напружень для зменшення ΔK і, отже, для зменшення швидкості зростання тріщини. Це викликає відповідне збільшення числа циклів при підростанні тріщини від l_0 до l_C. Швидкість dl/dN пов'язана з $\Delta\sigma$ нелінійно, і невелика зміна $\Delta\sigma$ викликає достатньо велику зміну dl/dN.
3. Змінити технологію і контроль виготовлення конструкції з тим, щоб зменшити початкову довжину тріщини l_0. З рис. 8.5 видно, що більший внесок в довговічність дає область малих довжин тріщин. Тому невелике зменшення початкової довжини тріщини повинно дати значний приріст довговічності. В прикладі, що розглядається, зменшення початкової довжини тріщини до l_0 = 4,7 мм приводять до збільшення довговічності на 20 700 циклів, протягом яких тріщина росте від 4,7 до 7,6 мм Сумарна довговічність при цьому виявляється рівною 102 700 циклів.

8.5 Динамічна механіка руйнування

Процес руйнування характеризується швидким розповсюдженням магістральної тріщини або сімейства розгалужених тріщин, тобто є істотно динамічним. В описі цього процесу на мікро- і макрорівнях залишається багато незрозумілого, і коли ми зустрічаємо в літературі твердження про те, що механіка руйнування надає необхідний апарат для розрахунку міцності тіл і конструкцій, то маємо на увазі так звану квазістатичну механіку руйнування, яка дає відповідь на питання про те, чи є існуюча магістральна тріщина стійкою чи ні. Насправді, квазістатична механіка руйнування розроблена достатньо добре, але це лише перше наближення до опису руйнування, яке дозволяє зробити висновок тільки про те, почнеться катастрофічне зростання тріщини чи ні. Предмет же динамічної механіки руйнування значно ширший, ніж квазістатичної. Якщо в квазістатичній механіці руйнування формулюється тільки критерій нестійкого розповсюдження тріщини, то в динамічній механіці руйнування потрібно встановити ряд критеріїв: для старту, зупинки, розповсюдження, викривлення траєкторії тріщини і її галуження. При спробах описання динамічного руйнування за допомогою магістральної гострокутної тріщини і коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) виникає відповідно цілий спектр критичних КІН: КІН старту, залежний від швидкості навантаження, КІН зупинки, КІН розгалуження, критичний КІН, залежний від швидкості тріщини. При цьому деякі експериментальні дані вдається задовільно пояснити, а деякі приводять до суперечностей з теоретичними положеннями. Однак експериментальні дані самі по собі є суперечливими. Можливо справа в тому, що експерименти є некоректними, оскільки в них нехтувалося взаємодією відбитих від меж хвиль з вершинами тріщини і недостатньо точно вимірювалися швидкість тріщини і коефіцієнт інтенсивності напружень. Оскільки при обробці експериментальних даних особливо важливо встановити зв'язок між тими процесами, що відбуваються в вершині тріщини і ефектами розповсюдження хвиль, то потрібне експериментальне устаткування, дозволяюче реєструвати зміну напруженого стану протягом мікросекунди (оскільки час проходження хвилі розширення, наприклад, через зразки невеликого розміру, що практично використовуються, не перевищує декількох десятків мікросекунд). Динамічна теорія взагалі тим і відрізняється від статичної, що вона досліджує розповсюдження хвиль. У випадку ж наявності в тілі стаціонарного дефекту, або дефекту що розповсюджується, картина хвильового поля стає надзвичайно складною, і це завжди треба брати до уваги. Так, наприклад, при ударному розриві зразка з урахуванням віддзеркалень хвиль залежність КІН від часу характеризується сильними осциляціями. Ще приклад — при галуженні вершина кожної гілки стає джерелом розповсюдження хвиль. Навіть мікродефекти, що формуються попереду вершини магістральної тріщини, випромінюють хвилі і взаємодіють з магістральною тріщиною, і, як показують дослідження нехтувати цим не можна. Отже, на нинішній стадії свого розвитку теорія динамічної механіки руйнування досить суперечлива, і зараз саме динамічна механіка руйнування є тією областю, де необхідна зусиль вчених, працюючих в області механіки руйнування. Відзначимо, що останні десятиріччя характеризується особливо швидким зростанням досліджень з динаміки руйнування. Вони включають розробку моделей руйнування, аналітичних і чисельних методів розв'язання задач динамічної теорії пружності і пластичності для тіл із стаціонарними або тими, що розповсюджуються тріщинами, розробку експериментальних методів. Динамічні навантаження можна розділити на два основні типи: гармонічні (наприклад ті, що змінюються синусоїдально в часі) і ударні.

Врахування інерційних ефектів при розрахунку конструкцій і споруд з тріщинами приводить до розгляду таких основних задач динамічної механіки руйнування:

1. Визначення залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень від частоти при дієї гармонійних навантажень.

2. Визначення залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень від часу для тріщини під дією ударних навантажень.

3. Визначення залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень від часу і швидкості розповсюдження тріщини
4.Визначення закону руху тріщини, якщо відомо залежність коефіцієнтів інтенсивності напружень від швидкості росту тріщини.
При чисельному розв’язанні першої задачі у випадку тіла скінченних розмірів коефіцієнти інтенсивності напружень визначаються за допомогою форм і частот вільних коливань, які можуть сильно залежати від конфігурації і довжини дефекту. У зв'язку з цим можна віднести до динамічної механіки руйнування і дослідження впливу тріщин на форми і частоти вільних коливань (такі дослідження важливі і для діагности дефектів неруйнівними методами контролю) . При розв’язанні поставлених основних задач застосовуються як чисельні, так і аналітичні методи у поєднанні (в деяких випадках) з використанням експериментальних результатів. Аналітичні розв’язки задач динамічної механіки руйнування у випадку тріщин нормального розриву, поперечного і подовжнього зсуву дозволяють зробити найважливіші якісні висновки про процеси, які передують крихкому руйнуванню при динамічному навантаженні, і про розповсюдження фронту руйнування. При математичному описанні розповсюдження тріщин найважливішим моментом є виявлення загальних закономірностей розподілу полів напружень і зсувів в околі вершини тріщини. Виявляється, що якщо вершина тріщини переміщується уздовж деякої гладкої кривої з довільною швидкістю, то в локальній системі координат (пов'язаної з вершиною тріщини) кутовий розподіл напружень залежить тільки від поточної швидкості цієї вершини. Напруження і зсуви можуть бути представлені у вигляді

$$\sigma = \frac{K(t)}{\sqrt{2\pi r}} f(\theta, v) + \ldots,\ u = \frac{K(t)}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} g(\theta, v) + \ldots \qquad (8.3)$$

Коефіцієнти інтенсивності напружень, що входять в цю залежність, є функціями часу, а кутовий розподіл напружень і зсувів залежить від швидкості. Кутовий розподіл напружень і переміщень в околиці вершини стаціонарної тріщини однакововий при статичному і динамічному навантаженні, а вплив
інерційного ефекту полягає в тому, що коефіцієнт інтенсивності напружень стає залежним від часу. Розв’язки ряду модельних задач дозволили зробити висновок про те, що через деякий період часу після прикладення навантаження характер залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень і ударних навантажень від часу ідентичний. Проте протягом цього періоду часу коефіцієнт інтенсивності напружень досягає свого пікового значення, істотно перевищуючого статичне (аналогічне виведення можна зробити і у разі гармонічного навантаження тіла з тріщиною). Таким чином, напружений стан біля вершини тріщини описується за допомогою коефіцієнтів інтенсивності напружень. Як наголошувалося раніше, критерій початку розвитку тріщини (званий іноді критерієм руйнування), який становить основу механіки руйнування, не виходить з рівнянь рівноваги і руху механіки суцільного середовища, а є додатковою умовою при вирішенні питання про граничний

стан тіла з тріщиною. Граничний стан рівноваги вважається досягнутим, якщо тріщиноподібний розріз отримав можливість розповсюджуватися. Динамічна модифікація вже відомого нам критерію руйнування Гріффітса має вигляд

$$2\gamma = G = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{v^2}{c_2^2 R_*(\delta_1,\delta_2)}\left(\delta_1 K_I^2(t) + \delta_2 K_{II}^2(t) + \frac{1}{\delta_2} K_{III}^2(t)\right)\right), \quad (8.4)$$

де $\delta_i = \sqrt{1-(v/c_i)^2}$ $(i=1,2)$, c_1, c_2 – швидкості розповсюдження хвиль розширення і зсуву в пружному середовищі, $R_*(\delta_1,\delta_2) = 4\delta_1\delta_2 - (1+\delta_2^2)^2$. При $v \to 0$ одержимо статичне співвідношення. Рівність (8.4) є динамічним аналогом співвідношення, зв'язуючого силові і енергетичні характеристики процесу руйнування, і воно може бути рівнянням (якщо покласти $2\gamma = G = G_C$) для визначення залежності швидкості розповсюдження тріщини від часу. Аналіз потоку енергії в вершину тріщини дозволяє зробити ряд корисних висновків. В інтервалі швидкостей $0 \le v \le c_R$ (c_R– швидкість хвиль Релея) для тріщин нормального відриву і поперечного зсуву $G > 0$, а в інтервалі $c_R < v < c_2$ потік енергії $G < 0$.

Оскільки ефективна поверхнева енергія 2γ є додатною, то розповсюдження тріщин з швидкістю більшою швидкості хвиль Релея, неможливо. Для тріщин подовжнього зсуву енергетичний аналіз показує, що швидкість розповсюдження не може перевищувати c_2. Відзначимо, що на практиці швидкість розповсюдження тріщини обмежується не швидкістю хвиль Релея а меншою величиною, що коливається для різних матеріалів від 0,2 до 0,5 від швидкості хвиль зсуву. Таким чином, якщо вдалося розв’язати рівняння рівняння динаміки суцільного середовищаза при заданих граничних умовах і знайти коефіцієнт інтенсивності напружень, то з (8.2) можна визначити закон руху тріщини. Наприклад, у випадку розповсюдження напівнескінченної тріщини подовжнього зсуву в полі рівномірного дотичного напруження

$$K_{III} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} q \sqrt{1-\frac{v}{c_2}} \sqrt{2c_2 t}\,, \quad (8.5)$$

де q — навантаження подовжнього зсуву. Підставляючи (8.5) в (8.4) при $K_I = K_{II} = 0$, отримаємо

$$2\gamma = \frac{4q^2}{\pi\mu} c_2 t \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c_2}}{1+\frac{v}{c_2}}}\,. \quad (8.6)$$

Для того, щоб права частина цієї рівності залишалася обмеженою величиною при великих значеннях часу t (тому що 2γ = const), необхідно, щоб швидкість розповсюдження тріщини v прагнула до c_2. У випадку прикладення зосереджених ударних навантажень на відстані x_0 від вершини тріщини поздовжнього зсуву маємо

$$K_{III} = q\sqrt{\frac{2}{\pi\left(x + x_0\right)}(1 - \frac{v}{c_2})}\ , \text{ при } c_2 \ge x_0. \qquad \mathbf{(8.7)}$$

і з (8.4) знайдемо

$$2\gamma = \frac{q^2}{\pi\mu}\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c_2}}{1 + \frac{v}{c_2}}}\frac{1}{x + x_0}. \qquad (8.8)$$

Очевидно, якщо q менше деякого критичного значення, тріщина взагалі перестане рухатися, оскільки при її зростанні права частина рівності може тільки зменшуватися. Якщо ж тріщина почала розповсюджуватися, то вона зупиниться після приходу її вершини в деяку точку x^*, у якій права частина формули (8.8) стане менше 2γ. Аналогично можна розглянути розповсюдження напівнескінченної тріщини у полі розтягуючих напружень q. У цьому випадку при $t \to \infty$ швидкість тріщини асимптотично наближається до швидкості хвиль Релея.

При дії ударних навантажень поведінка залежних від часу динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень природно, має складніший характер. При розгляді скінченних пластин з тріщинами аналітичні рішення пов'язані з великими математичними труднощами, у зв'язку з чим необхідно використовувати чисельні методи. Чисельні методи дозволяють у принципі розрахувати поведінку тріщини практично у всіх випадках, звичайно якщо математична модель, що використовується, відповідає дійсності.

Перейдемо у зв’язку з цим до порівняння теоретичних уявлень з експериментальними даними. Основні відмінності між моделлю, квазікрихкого руйнування і реальним руйнуванням можна пояснити тільки на мікроструктурному рівні. Розглянемо це питання детально. Серед підходів до опису руйнування можна виділити два: в першому міцність тіла характеризується поведінкою магістральної пластини з тріщиною в другому — через розвиток і зростання множини мікродефектів. Перший напрям домінує в науковій літературі, перш за все тому, що він дає задовільний критерій міцності і доступний розрахунковий апарат при квазістатичних навантаженнях. Другий напрям в основному розвивається у фізиці твердого тіла і матеріалознавстві (і рідко в механіці, так як він поки не привів до задовільних моделей). Проте розвиток множинних дефектів і магістральної тріщини — взаємозв'язані процеси, причому не тільки на стадії зародження макротріщини, але і на стадії її розповсюдження. Макротріщина забезпечує високу локалізовану концентрацію напружень, при цьому її поведінка стає залежною від зростання мікродефектів, що з'являються при цьому. У домінуючій зараз в динамічній механіці руйнування моделі звичайно розглядається зростання прямолінійної тріщини в пружній площині. При цьому у вершині виникають необмежені напруження, і процес руйнування вважається таким, що локалізується в самій вершині тріщини. Крім того, вважаєсья, що витрата енергії на утворення одиниці нової поверхні є константою матеріалу. Виходячи з цього, розраховується пружнодинамічне поле напружень у вершині тріщини і формулюється критерій розповсюдження тріщини — рівняння енергетичного балансу (8.4).Отже, можна виділити наступні основні положення моделі динамічної механіки, що ідеалізують процес руйнування.

1.Поля напружень у вершині тріщини описуються за допомогою коефіцієнтів інтенсивності.

2.Критерії старту, зупинки і розповсюдження тріщини виводяться з рівняння енергетичного балансу (8.4).

Таким чином, для висновку про адекватність цієї моделі необхідно перевірити виконання саме цих двох положень. Це можна зробити, аналізуючи експериментальні дані по коефіцієнти інтенсивності напружень і порівнюючи умови старту, розповсюдження і зупинки тріщини з теоретичними прогнозами.

При невеликих швидкостях навантаження і невеликих навантаженнях є відповідність між теоретичними і екксперементальними значеннями коефіцієнта інтенсивності напружень, в той час як при великих швидкостях і навантаженнях такої відповідності немає. Поясненям цієї невідповідності є припущення, що попереду тріщини виникають мікротріщини, які потім об'єднуються і взаємодіють між собою. На поверхні руйнування після проходження тріщини з високою швидкістю, можна побачити три зони: дзеркальну, матову і "пірйову". Після проходження пірйової зони тріщина розгалужується на декілька гілок. Дзеркальна зона характеризується абсолютно гладкою, поверхнею, що відбиває світло. В матовій зоні поверхня грубіша і стає зовсім шорсткою в останній зоні —пірйовій. Важливо відзначити встановлений при обробці експериментальних даних зв'язок між якістю поверхні і величиною прикладеної розриваючого ударного навантаження. Виявилося, що при збільшенні цього навантаження розмір дзеркальної зони зменшувався а розміри матової і пір'йової зон збільшувалися. При зменшенні ж рівня навантаження, навпаки, розмір дзеркальної зони збільшувався, а розміри матової і пір'йової зон зменшувалися. Таким чином виходить, що чим більше енергії вивільнюється у вершині тріщини, тим більш шорсткою становиться поверхня руйнування. Знаходячись на цих позиціях, вдається дати прийнятний якісний опис розгалуження тріщин як неперервного процесу еволюції випереджаючих мікротріщин (рис 8.1)

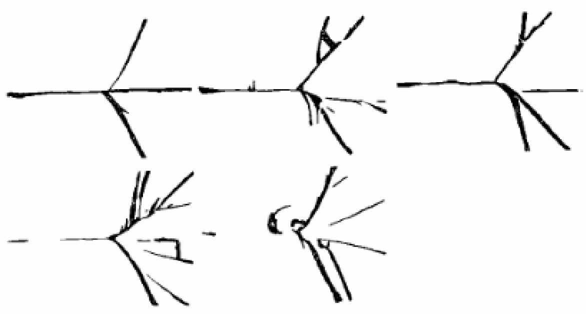


Рис. 8.6 Розгалуждження тріщин

8.6 Механіка корозійного руйнування

На початку 70-х років почався інтенсивний розвиток спеціального розділу механіки руйнування, присвяченого питанням тріщиностійкості металів і сплавів в умовах сумісної дії корозійних середовищ і тривалих навантажень. Перші дослідження опору зростанню корозійних тріщин з використанням коефіцієнтів інтенсивності напружень стосувалися тривалого статичного навантаження (корозійного розтріскування). Було показано, що такі середовища, як вода, спирти і т. п., що традиційно вважалися малоактивними викликають докритичне зростання тріщин у високоміцних сталях при значеннях коефіцієнта інтенсивності напружень набагато менших в'язкості руйнування K_{1C}. Надалі кардинальну дію корозійних середовищ на докритичне зростання тріщини було підтверджено і для ряду інших високоміцних сплавів. Корозійні середовища сильно знижують втомну довговічність конструкційних матеріалів в першу чергу за рахунок прискорення процесу розповсюдження тріщин, що уже утворилися. Це свідчить про необхідність врахування впливу робочих середовищ на втомне зростання тріщин при інженерному конструюванні. На перших етапах розвитку механіки корозійного руйнування тріщиностійкість при статичних навантаженнях звичайно оцінювали по залежності довговічності зразків з штучними тріщинами від значень коефіцієнта інтенсивності напружень в початковий момент випробування (K_0 *або* K_{I0}). При пониженні K_0 час до руйнування зразків збільшується. На підставі такої діаграми визначається значення K_{scc} або K_{Iscc} нижче якого докритичне зростання тріщини відсутнє. Величина K_{Iscc} — важливий параметр системи матеріал — середовище, який дозволяє розраховувати допустимі напруження в конструкції, що містить тріщиновидні дефекти певних розмірів і на яку діють тривалі статичні навантаження в корозійних середовищах. Ця величина є структурно-чутливим параметром, низькі його значення характерні для високоміцних малопластичних матеріалів (для яких K_{1scc} може бути у декілька разів менше значення K_{1C}). Зі зниженням міцності і підвищенням пла-пластичності K_{Iscc} підвищується і досягає значення K_{1C}, що свідчить про нечутливість матеріалу до дії корозійного середовища. Довговічність зразків складається з інкубаційного періоду і періоду докритичного зростання тріщин.

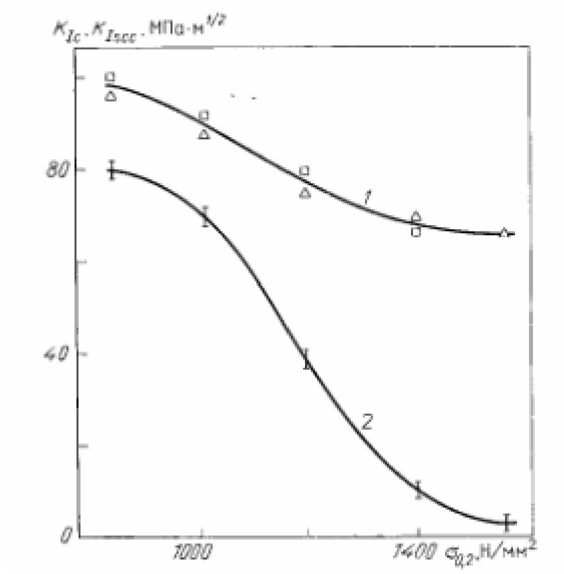


Рис.8.7 Залежність $\boldsymbol{K_{1C}}$ (лінія 1) і $\boldsymbol{K_{1scc}}$ (лінія 2) від границі текучості сталі при випробуванні у морській воді

Інкубаційний період — цей час від прикладення навантаження до зразка до початку докритичного зростання тріщини, коли швидкість перевищує $\mathbf{4 \cdot 10^{-10}}$ мм/с. Цей період, який спостерігається, наприклад, при випробуваннях пластичних матеріалів, залежить від початкового коефіцієнта інтенсивності напружень і збільшується з його пониженням. Для високоміцних металів процеси, обумовлюючі докритичне зростання тріщини, локалізовані в невеликій зоні біля її вершини, де напружено-деформований стан, визначається одним параметром $\boldsymbol{K}$ – коефіцієнтом інтенсивності напружень. Тому основною розрахунковою формулою для визначення часу докритичного зростання тріщини є залежність швидкості росту тріщини від коефіцієнта інтенсивності напружень $\frac{dl}{dt} = v(K)$, графік якої називається кінетичною діаграмою руйнування. Корозійна тріщиностійкість металів і сплавів при циклічному навантаженні оцінюється, як правило на підставі кінетичних діаграм утомленості, на яких, як і у випадку випробувань в інертних середовищах, будується залежність швидкості розповсюдження тріщини як функції амплітудних значень коефіцієнта інтенсивності $\Delta \boldsymbol{K}$ (іноді максимального значення коефіцієнта інтенсивності за цикл навантаження $\boldsymbol{K}_{\mathbf{max}}$). Із початкової ділянки кінетичної діаграми визначають амплітудне порогове значення $\Delta \boldsymbol{K}$ досліджуваної пари метал —середовище для певних умов випробування (частота і форма циклу навантаження). В деяких випадках схильність до корозійного зростання тріщин виявляють і порівняно маломіцні конструкційні матеріали, для яких рекомендується оцінювати тріщиностійкість з позиції нелінійної механіки руйнування. Останнім часом для вивчення корозійного розтріскування корпусних сталей застосовується метод $\boldsymbol{J}$-интеграла. Використання методу полягає у побудові кривих тривалої тріщиностійкості у координатах «початковий рівень J_0— час до руйнування». По аналогії з K_{ISCC} на підставі такої залежності визначається порогове значення J-интеграла J_{1SCC}, під яким мається на увазі максимальний рівень J_{10} за відсутності докритичного зростання тріщини. Основні типи кінетичних діаграм коррозійно-втомного зростання тріщин представлені на рис. 8.8. Пунктирні лінії – результати випробувань в інертній воді.

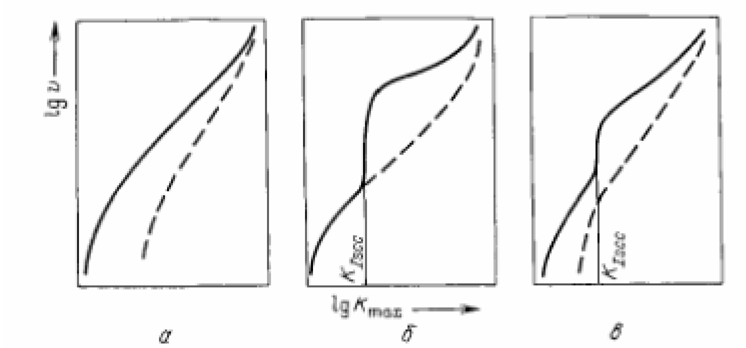


Рис.8.8

З рисунка видно, що корозійні середовища можуть суттєво змінювати конфігурацію діаграм, властиву випробуванням в інертному середовищі. Для сплавів, не схильних до корозійного розтріскування, кінетична діаграма має S-образний вигляд (рис. 8.8, а), а зниження частоти наватаження зсовує її у бік більш високих швидкостей росту. На діаграмах сплавів, чутливих до дії тривалих статичних навантажень і корозійних середовищ, при $K_{\max} = K_{1SCC}$ спостерігається різке прискорення зростання тріщини (рис. 8.8,б,в) з подальшим виходом на пологу або навіть горизонтальну ділянку, в залежності від того, який вид діаграми є характерним для статичного розтріскування даної системи. Розрізняють три основні механізми впливу корозійних середовищ на тріщиностійкість конструкційних матеріалів: адсорбційне пониження міцності, водневе окрихчування і корозійне розчинення. Адсорбція поверхнево-активних речовин на поверхні високонапруженого матеріалу в кінчику тріщини приводить до пониження поверхневої енергії і полегшення руйнування (ефект Ребіндера). Адсорбційну дію можна успішно використовувати для підвищення ефективності металообробки. З трьох основних механізмів саме адсорбційна дія є домінуючою при великих значеннях коефіцієнта інтенсивності напружень, коли у зв'язку з високими швидкостями докритичного росту тріщини інші механізми не встигають виявитися. За сучасними уявленнями, основним процесом, який прискорює докритичние зростання тріщин, що приводить до аварій є водневе окрихчування у малій області поблизу вершин тріщин. Атомарний водень, що завжди міститься в чистому або пов'язаному з нейтральними молекулами вигляді (наприклад, в розчинах електролітів і воді), в результаті дифузії здатний проникати в будь-які метали. Розчинність водню при нормальній температурі і тиску складає від 10 до 100 см3 на 1 кг металу, із зростанням же температури і тиску розчинність істотно зростає. Окрихчування спостерігається вже при концентрації в 2 см3 на 1 кг металу, а з 10 см3 на 1 кг воно признається небезпечним. Найуразливішим для проникнення водню є малі ділянки нової поверхні металу, не захищені плівкою оксиду. Малі розміри зони водневого окрихчування у багатьох випадках дозволяють вести розрахунки докритичного зростання тріщини, а значить, і довговічності металевої конструкції, взаємодіючої з воднем, виходячи з залежності швидкості тріщини від коефіцієнта інтенсивності напружень $\frac{dl}{dt} = v(K)$. Така залежність, яку називають діаграмою розтріскування, визначається експериментально або теоретично. Для теоретичної оцінки цієї залежності перш за все проводяться розрахунки накопичення водню в зоні прилеглої до вершини тріщини.

На рис. 8.9 приведені результати інтегрування рівняння дифузії водню в область вершини тріщини для сталі з характеристиками $E = 2 \cdot 10^5 H / мм^2, \sigma_T = 1581 H / мм^2$.

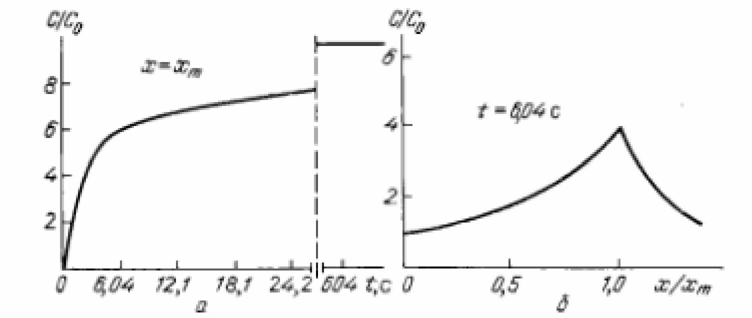


Рис.8.9 Концентрація водню при дифузії у вершині тріщини: а) концентрація у кінці пластичної зони при $x = x_m = 1,22 \frac{K^2}{E\sigma^T}$, б) розподілення концентрації перед вершиною тріщини $(x = 0)$ в момент $t = 6.04\ c$.

Вже протягом декількох секунд у вершині тріщини досягається концентрація водню, яка суттєво перевищуює поверхневу концентрацію. Звичайно припускають, що при досягненні критичної концентрації водню на відстані x_C перед вершиною тріщини відбувається локальне руйнування, і тріщина стрибком підростає на величину x_C. Використовуючи розрахункові криві концентрації водню, можна знайти інтервал між стрибками, а потім розрахувати і середню швидкість зростання тріщини. Звичайно ж, водневе окрихчування далеке не завжди виявляється в чистому вигляді, картину можуть суттєво змінити інші чинники. Наприклад, кисень уже в малій концентрації здатний практично миттєво припинити докритичне зростання тріщини у середовищі водню за рахунок утворення тонкої окисної плівки, яка захищає поверхню металу (рис. 8.10).

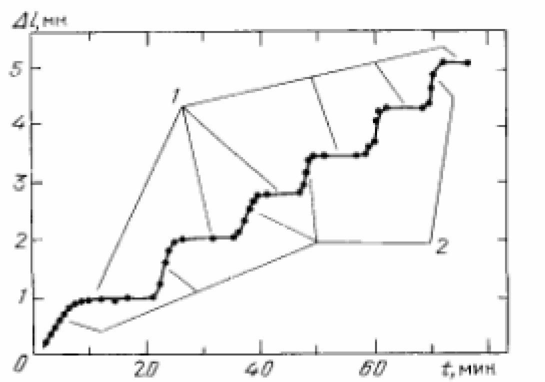


Рис.8.10 Вплив кисню на докритичне зростання тріщини у сталі в середовищі зволоженого водню (залежність приросту тріщини Δl від часу t): 1 — зволожений водень з 0,7 % кисню, 2 — зволожений водень

Після припинення подачі кисню починає брати гору процес відновлення кисню воднем або ж розчинення плівки водою. З практичної точки зору позитивний вплив кисню є щасливим випадком, адже ймовірно, саме цей вплив допомагає забезпечити необхідну тріщиностійкість високоміцних сталей на відкритому повітрі. Криві докритичного зростання тріщин в сталях практично однакові на повітрі і в інертному газі. Слід підкреслити, що така захисна дія кисню виявляється тільки при статичному навантаженні і абсолютно не позначається при циклічному навантаженні. В більшості випадків корозійного зростання тріщин процеси адсорбції, водневого окрихчування і корозійного розчинення взаємозв'язані між собою, і протікання одних обумовлює прояв інших. Взаємозв'язок цих процесів ускладнений впливом структури металу, виду напруженого стану, зовнішніх умов навантаження. Вивчення цього взаємозв'язку складає предмет механіки корозійного руйнування — наукового напряму на границі механіки руйнування, матеріалознавства і хімічного опору матеріалів.

8.7 Температурні задачі механіки руйнування

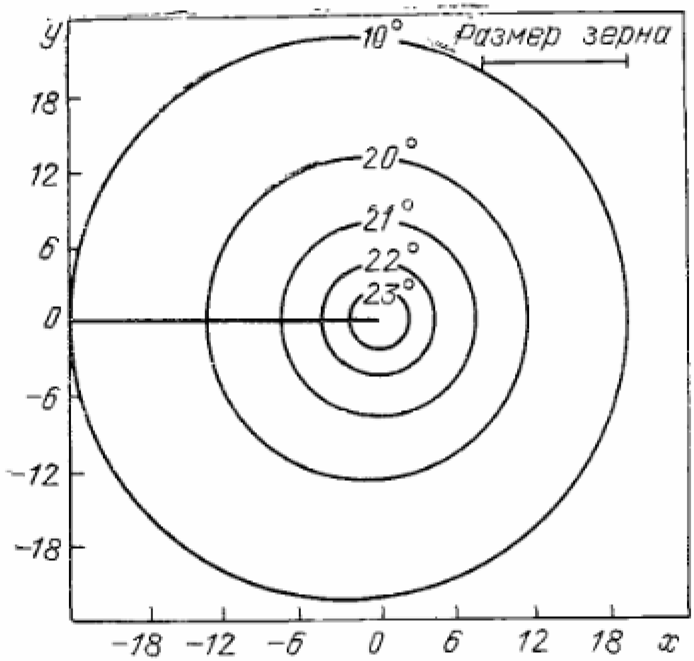
Крихкі руйнування від внутрішніх температурних напружень можуть відбуватися не тільки при швидкому нагріванні, але іпри швидкому охолоджуванні. Скажімо, в лісі в сильний мороз досить часто руйнуються стовбури дерев (особливо дубів), утворення тріщин супроводиться різким, схожим на постріл звуком. Раптове охолодження виникає також і при аварії ядерного реактора, коли рідина системи охолоджування потрапляє на нагріті елементи конструкції. Розрахунки оптимальних характеристик, гарантуючих відсутність руйнування в такій ситуації, є обов'язковими при проектуванні ядерних силових установок. Тепловий удар в результаті нерівномірного нагріву або охолодження конструкцій може викликати розповсюдження тріщин, що є в них, навіть при відсутності механічних навантажень. Іноді ж, навпаки дія температурних напружень приводить до позитивних наслідків, знімаючи повністю або частково концентрацію напружень у вершині дефекту, обумовлену зовнішніми механічними навантаженнями. Таким чином, в реальній практиці можуть зустрітися різноманітні ситуації. Природно, що і температурні задачі механіки руйнування, що адекватно описують ці явища, дуже складні і багатогранні. Тому ми обмежимося ескізним викладом деяких цікавих проблем. Додаткові температурні деформації, виникаючі при нагріванні від температури T_0 до температури T, звичайно вважають пропорційними $\Delta T = T - T_0$. Тоді для врахування дії температури у законі Гука поздовжні деформації треба записати як $\alpha\Delta T$, а деформації зсуву залишити без зиіни. Коефіцієнт α (коефіцієнт температурного розширення матеріалу), є однією з найважливіших фізичних сталих. Відмінність цих коефіцієнтів для матеріалів деталей, жорстко сполучених між собою, приводить при зміні температури до виникнення значних деформацій, наприклад, до вигину біметалічної пластини. Якщо ж конструкція не має можливості вільно деформуватися, то можуть виникнути великі внутрішні напруження, що приводить до руйнування. Античні статуї, наприклад, швидко руйнувалися через різницю коефіцієнтів температурного розширення золота і слонячої кістки або мармуру. Врахування температурних деформацій приведе до появи додаткових об'ємних сил з доданками $\beta\frac{dT}{dx}, \beta\frac{dT}{dy}, \beta\frac{dT}{dz}$, $(\beta = \frac{\alpha E}{1-2\nu})$, які пов'язані з перепадом температур між окремими мікрооб'ємами. Якщо розподілення температур відоме, то розрахунок напружено-деформованого стану тіла зводиться до звичайного розрахунку теорії пружності. Звідси, зокрема, витікає, що при нерівномірному нагріві поля напружень і зсувів біля вершини тріщини описуються вже відомими формулами асимптотичними формулами Колосова-Вестергардта, тільки коефіцієнти інтенсивності напружень будуть залежати як від механічних, так і від теплових зовнішніх дій.

Розрахунок температурних полів вимагає розв'язання рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right),$$

(де κ— коефіцієнт теплопровідності, ρ— густина, c— теплоємність при сталій деформації) при відомому початковому розподілі температур і відомих умовах на границі тіла. На поверхні тіла повинна бути задана температура або потік тепла, що поступає із зовнішнього середовища, або ж задається умова теплообміну (наприклад, за законом Ньютона, коли втрати тепла пропорційні різниці температур тілаі навколишнього середовища). Серед механіків
проходили жваві дискусії з приводу того, які умови треба задавати на берегах тріщини. Відповідь не є однозначною, оскільки все залежить від умов контакту берегів тріщини і від вмісту самої тріщини (іноді доводиться вирішувати взаємозв'язані задачі механіки руйнування, гідродинаміки або газової

динаміки для середовища, заповнюючого порожнину розриву). Розв’язання задач про тріщини в нерівномірно нагрітих тілах пов'язано з досить великими математичними труднощами навіть в простих, на перший погляд, задачах..



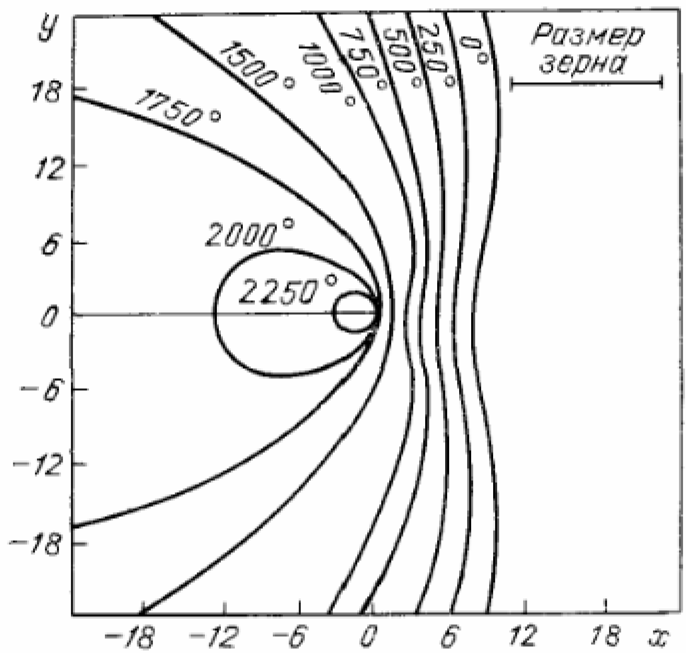


Рис.8.11 Ізотерми біля вершини тріщини у сталі

Температурне поле по-різному впливає на тріщину. Крім того, сама тріщина, що рухається, є могутнім джерелом тепла. Насправді, за одиницю часу в її вершину стікає потік енергії Gl, який, за вирахуванням поверхневій енергії $2\gamma l$, витрачається на пластичні деформації і руйнування матеріалу в малій зоні біля вершини тріщини. Теплообмін з оточуючим матеріалом відбувається повільно, і тому кінцева зона розігрівається до дуже високих температур. Картини ізотерм у вершини тріщини нормального розриву, що рухається в сталі із швидкістю 1 м/с і 100 м/с(рис. 8.11, а і б), отримані розрахунковим шляхом, свідчать про високий рівень температур в надзвичайно малій зоні біля вершини тріщини (температура оддалік неї 0°C). Вимірювання за допомогою термопар показують підвищення температури на **1** градус на відстані приблизно 1 мм і вже на 130 градусів на відстані 30 мкм від вершини тріщини, що біжить в сталі із швидкістю 10 м/с. Ближче до вершини тріщини вимірювання цим методом провести не вдається. Оптичні ж методи свідчать про розігрівання на 230 ° у оргсклі , на 1900° в склі і на 4400° у кварці, зрозуміло, на мікроскопічних відстанях від вершини тріщини. Цей факт і є поясненням того, що такий сильний розігрів сам по собі не здатний істотно оплавити оточуючий вершину тріщини матеріал і загальмувати її. В багатьох галузях – в атомному машинобудуванні, двигунобудуванні та ін. необхідно враховувати напруження, виникаючі при раптових змінах температури. Дія цих напружень є короткочасною, але вони великі і можуть привести до крихкого руйнування або до термічної утомленості конструкцій.

Лекція 11 Експериментальні методи визначення характеристик тріщиностійкості

11.1 Випробувальне устаткування

Для визначення характеристик тріщиностійкості використовують машини з механічним, гідравлічним або електрогідравлічним приводом, метрологічні параметри яких відповідають ГОСТ 7855-84.

Необхідне максимальне зусилля випробувальної машини розраховують за формулами

- для зразків типу 1

$$P_{\max} \geq 0{,}5(b-2l)t(\sigma_{0,2}+\sigma_B);$$

- для зразків типу 2

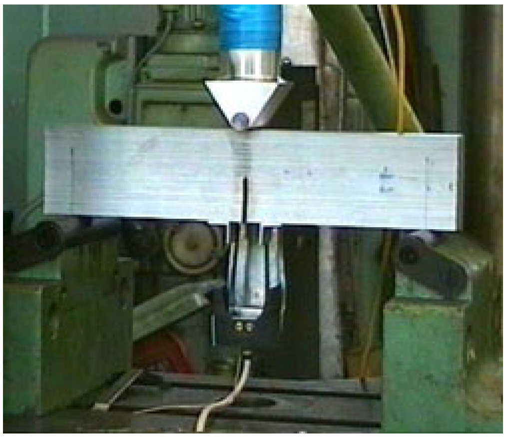
$$P_{\max} \geq 0{,}4d^2(\sigma_{0,2}+\sigma_B);$$

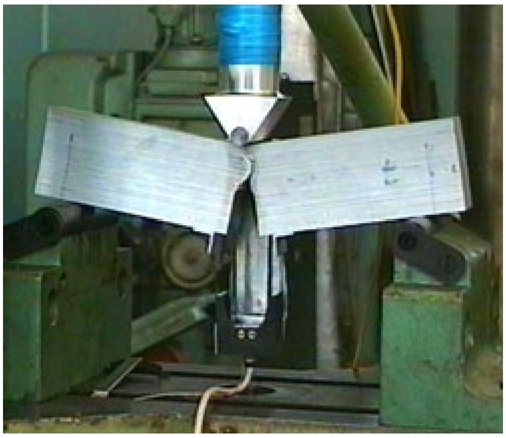
- для зразків типу 3

$$P_{\max} \geq 0{,}2(b-l)t(\sigma_{0,2}+\sigma_B);$$

- для зразків типу 4

$$P_{\max} \geq 0{,}1\frac{(b-l)^2}{b}t(\sigma_{0,2}+\sigma_B).$$





11.1.1 Геометрія зразків

Для визначення характеристик тріщиностійкості застосовують, згідно з ГОСТ 25.506-85, наступні зразки:

- тип 1 — плоский прямокутний з центральною тріщиною для випробувань на осьове розтягування (рис. 2.7);
- тип 2 — циліндричний з кільцевою тріщиною для випробувань на осьове розтягування (рис. 2.8);

• тип 3 — прямокутний компактний зразок з краєвою тріщиною для випробувань на позацентровий розтяг (рис. 2.9);

• тип 4 — плоский прямокутний зразок з краєвою тріщиною для випробувань на трьохточковий згин (рис. 2.10).

На рисунках 2.7 — 2.10 показане співвідношення розмірів зразків і схеми навантаження. Рекомендуються такі розміри зразків:

- тип 1 — ширина b не менше 50 мм;
- тип 2 — діаметр D не менше 12 мм;
- тип 3 — товщина t не менше 20 мм;
- тип 4 — товщина t не менше 10 мм

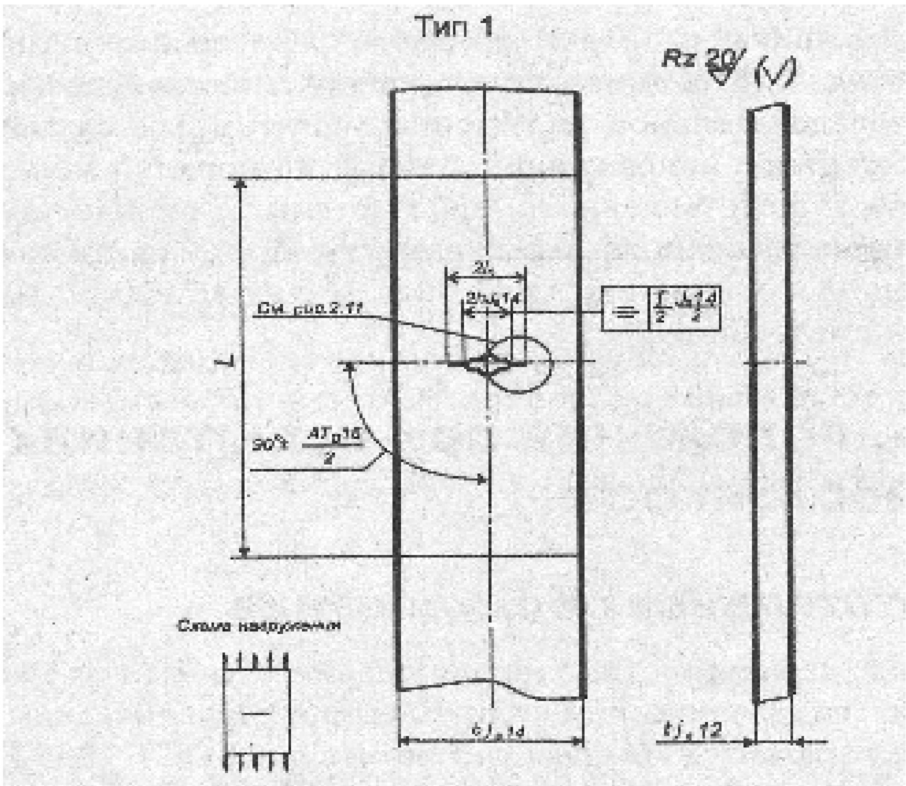


Рис. 2.7. Зразок типу 1 для визначення характеристик тріщиностійкості

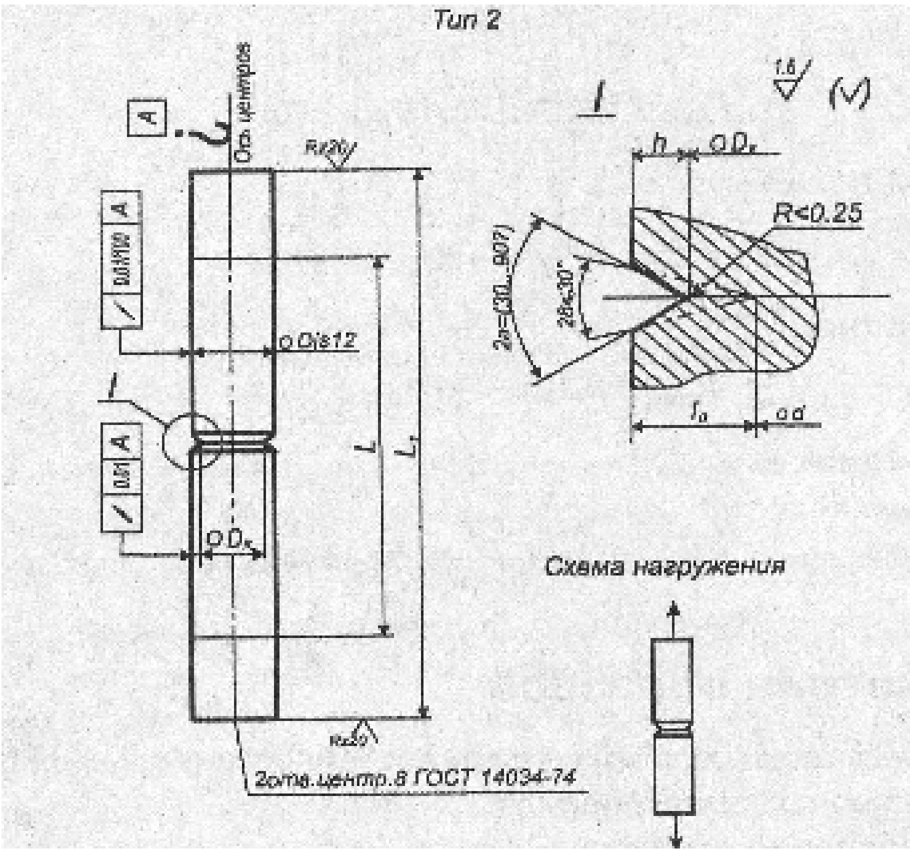


Рис. 2.8. Зразок типу 2 для визначення характеристик тріщиностійкості

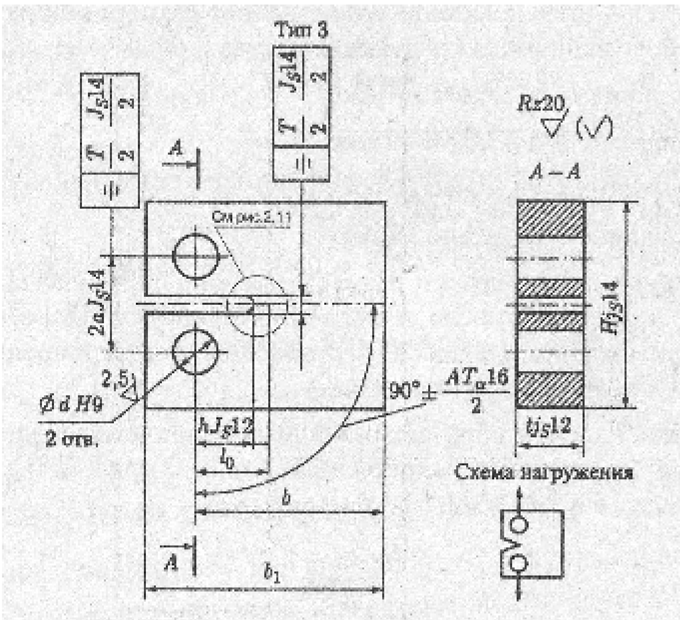


Рис. 2.9. Зразок типу 3 для визначення характеристик тріщиностійкості

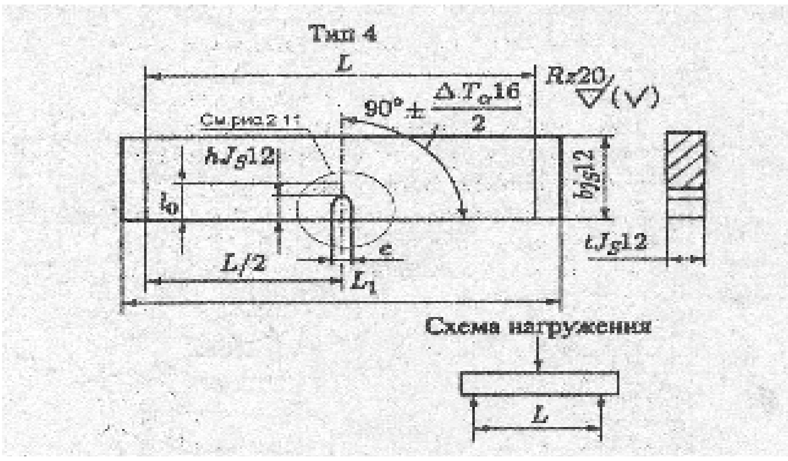


Рис. 2.10. Зразок типу 4 для визначення характеристик тріщиностійкості

В зразках типів 1 і 2 форма і розміри частин, що служать для кріплення і навантаження, визначають після вибору конструкції закріплень. Розмір *h* призначають залежно від способу виготовлення надрізу і кріплення зразка так, щоб він не, руйнувався в закріпленнях.

Ініціюючий надріз в зразках різних типів показано на рис. 2.11. Для зразків типу 1 застосовують надрізи виду*,* 3 (рис. 2.11), для зразків типів 3 і 4 виду 1*б* і 2б.

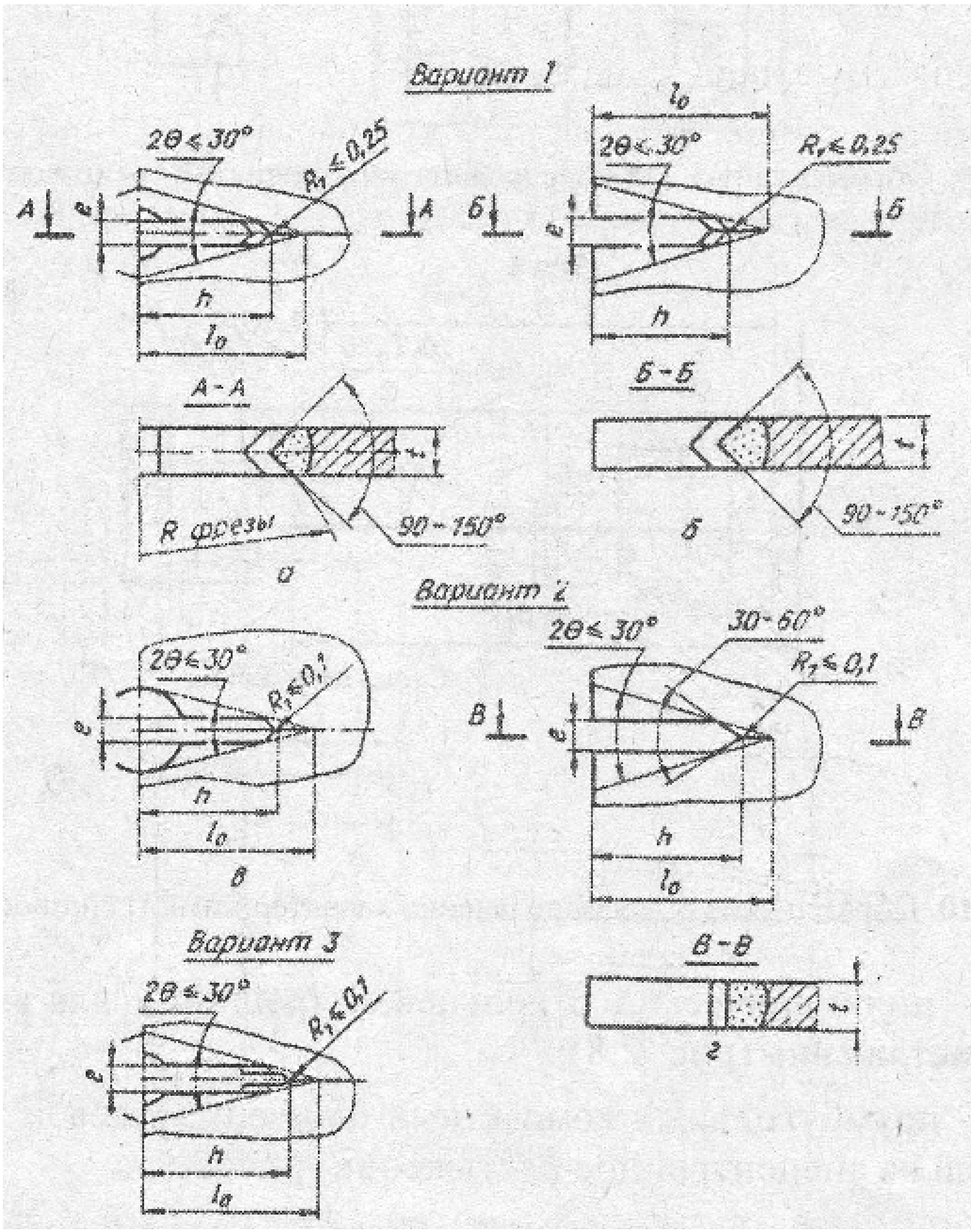


Рис. 2.11. Схема надрізів зразків різних типів

Втомну тріщину наносять так, щоб контур надрізу знаходився між прямими, що перетинаються під кутом $20-30^{\circ}$ у вершині тріщини (див. рис. 2.7), а різниця $(l_0 - h)$ була не менше 1.5 мм.

Втомні тріщини в плоских зразках типів 1, 3 і 4 наносять при змінному розтягуванні з коефіцієнтом асиметрії циклу $R = 0.1 - 0.2$, а в зразках типу 2 - при круговому згині $(R = -1)$. При цьому реєструють мінімальні і максимальні зусилля циклу і число циклів. Номінальні напруги при максирисьному зусиллі циклу повинні бути не більше (- визначають при температурі, при якій наносять втомні тріщини), а число циклів навантаження при нанесенні втомної тріщини, що рекомендується, - не менше .

11.1.2 Вимірювання зсувів і прогинів

Для вимірювання зсувів v або прогинів застосовують двохконсольні датчики тензорезисторного типу. Захватні частини датчиків, способи їх установки на зразках і розміри елементів датчиків в зоні їх кріплення приведені на рис. 2.12.

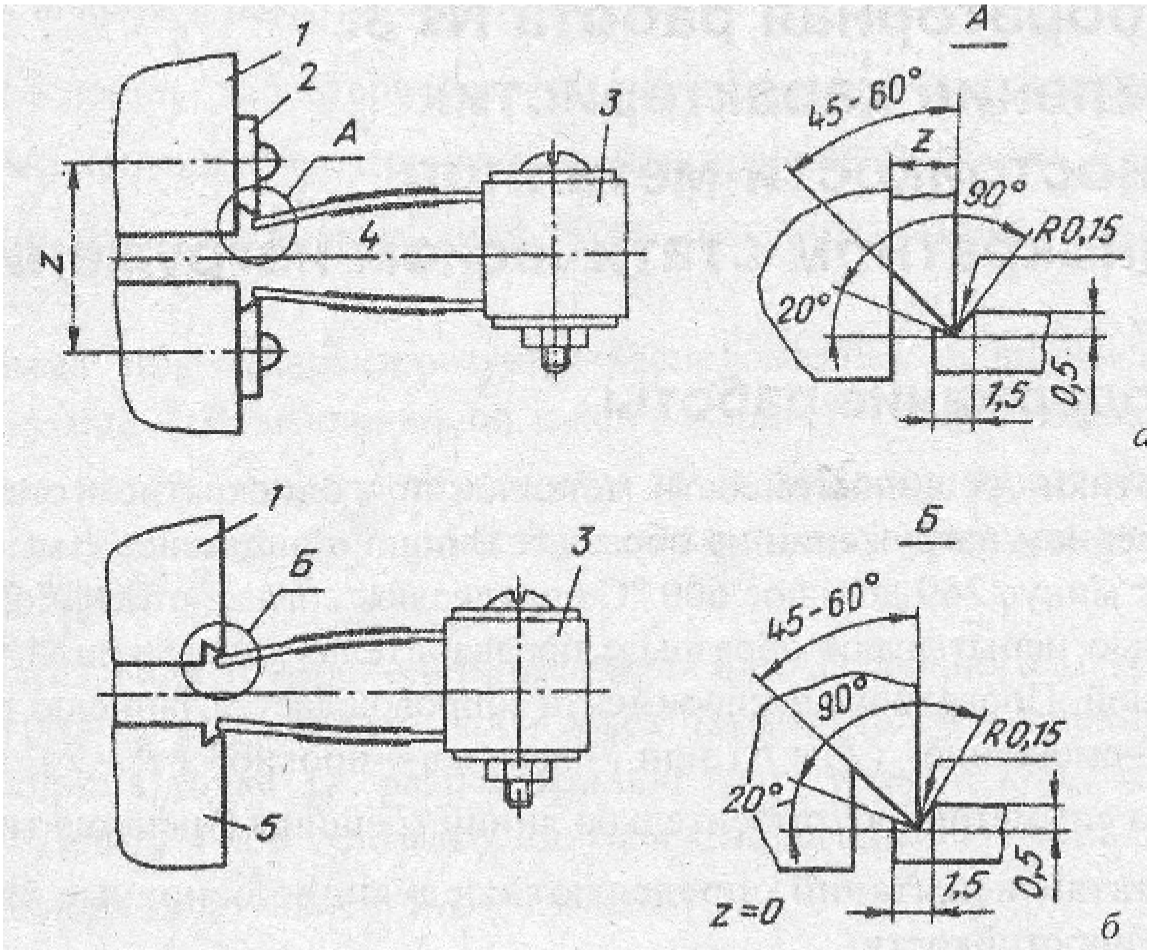


Рис. 2.12, Установка двохконсольних датчиків на зразках: 1 - зразок; 2 - накладні опорні призми: 3 - датчик зсуву; 4 - площина надрізу; 5 - призматичні виступи

Установку датчиків зсуву на зразках типів 1 - 4 проводять за допомогою накладних опорних призм (рис.2.12,а) або на призматичних виступах, виготовлених на торцях зразків (рис. 2.12, *би).*

Двохконсольний датчик згину f для зразків типу 4 встановлюється на опорних призмах, одна з яких жорстко закріплена на навантажуючому ножі, а інша на траверсі випробувальної машини.

Датчики переміщень v або прогинів, а також пристрої для записування діаграм і повинні забезпечувати:

- тангенс кута нахилу лінійної ділянки діаграм $P - v$ і до осі або в межах 1 - 3;
- масштаб діаграми по осі v і не менше 25:1.

При випробуваннях за визначенням K_{Ic} масштаб по осі збільшують не менше ніж вдвічі в порівнянні з приведеними вище.

При випробуванні зразків типу 4 номінальні діаметри опорних роликів і центрального навантажуючого ножа повинні бути рівні $\frac{b}{3}$.

11.2 Визначення характеристик тріщиностійкості металів при однократному статичному навантаженні

Характеристики тріщиностійкості металів при однократному статичному короткочасному навантаженні на зразках товщиною не менше 1 *мм* при температурі від мінус 269 до плюс 600 градусів визначають згідно з ГОСТ 25.506-85. З цією ціллю випробовують зразки із заздалегідь нанесеною втомною тріщиною. Проведення експерименту супроводжується записом діаграм "навантаження-зсув" або "навантаження-прогин" . Навантаження зразка симетричне відносно лінії тріщини (тріщина типу I).

За наслідками випробувань визначають такі основні характеристики тріщиностійкості:

- силові - критичні коефіцієнти інтенсивності напружень K: $\boldsymbol{K_{IC}, K_C^*, K_{QT}, K_C}$;
- *деформаційні - розкриття у вершині тріщини δ_C;*
- енергетичні - критичні значення - $\boldsymbol{J}$ - интеграла $\boldsymbol{J_C}$ або $\boldsymbol{J_{Ic}}$.

Тріщиностійкість металів оцінюють по одній або декількох величинах (J_{Ic}). При виконанні умов коректності визначення величини K_{Ic} вона є основною характеристикою тріщиностійкості матеріалу.

Визначувані за справжнім стандартом характеристики тріщиностійкості (разом з іншими механічними властивостями) можуть бути використані для:

- порівняння різних варіантів хімічного складу, технологічних процесів виготовлення, обробки і контролю якості металів і сплавів;
- порівняння матеріалів при обгрунтовуванні їх вибору для машин і конструкцій;
- розрахунків на міцність несучих елементів конструкцій з урахуванням їх дефектності, геометричних форм і умов експлуатації; аналізу причин аварій і руйнувань конструкцій.

При визначенні характеристик, K_C, K_{QT}, K_C^* K_C^* випробування зразків типів 1 - 4) проводять до руйнування з реєстрацією діаграм $P - v$.

Можливі чотири основні види таких діаграм, схематично показано на рис. 2.13.

1. Діаграма виду I характеризується розташуванням вершини (точка C) лівіше прямої, нахиленій до осі $\boldsymbol{v}$ (або $\boldsymbol{f}$) під кутом $\boldsymbol{\alpha_5}$, тангенс, якого на 5 відсотків менше тангенса кута нахилу дотичної до початкової лінійної ділянки діаграми. Руйнування зразка відбувається в точці B.

2. Діаграма виду *II* характеризується наявністю локального максимуму навантаження (точка D), що знаходиться лівіше прямої OB . Руйнування зразка відбувається в точці C, розташованій лівіше прямої OB, нахиленої до осі $\boldsymbol{\nu}$ (або $\boldsymbol{f}$) під кутом тангенс якого на 30% менше тангенса кута нахилу дотичної OA (кута $\boldsymbol{\alpha}$).

3. Діаграма виду *III* характеризується наявністю максимуму навантаження (точка C), відповідного руйнуванню зразка, лежачій лівіше прямої OG.

4. Діаграма вигляду *IV* є кривою з максимальним навантаженням в точці C. Руйнування зразка відбувається в точці F. розташованої правіше крапкиC .

Характеристики тріщиностійкості матеріалів визначаються по силах $\boldsymbol{P_Q}, \boldsymbol{P_D}, \boldsymbol{P_C}$,, які відповідають характерним точкам кривих, показаних на рис. 2.13.

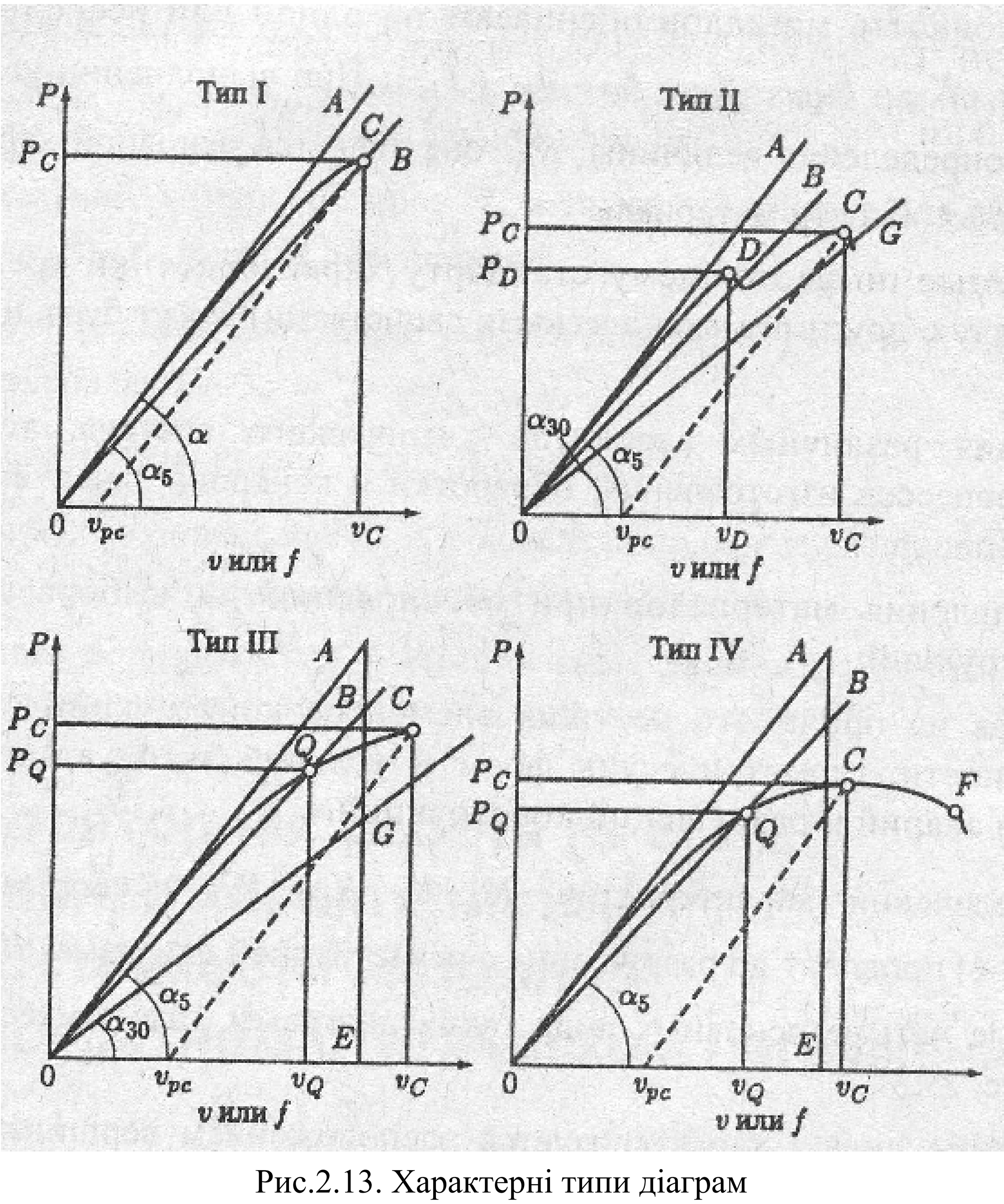


Рис.2.13. Характерні типи діаграм

11.2.1 Формули для коефіцієнтів інтенсивності напружень

З діаграм $P-v$ визначають навантаження $P_Q, P_D, P_C,$ орієнтуючись на характерні типи діаграм, показаних на рис. 2.13. Сила P_Q приймається як розрахункова. Для діаграми вигляду І приймають $P_Q = P_C$, для діаграми виду ІІ $P_Q = P_D$, для діаграм вигляду Ш і VI - навантаження визначають в точці перетину діаграми з п'ятипроцентною січною ОВ. По значеннях P_Q обчислюють допоміжні коефіцієнти інтенсивності напружень K_Q за формулами для коефіцієнтів інтенсивності :

- для зразка типу 1 при $0{,}3b \le 2l \le 0{,}5b$

$$K_Q = \frac{P_Q}{t\sqrt{b}} Y_1, \tag{2.1}$$

де $Y_1 = 0{,}38\left[1 + 2{,}308\left(\frac{2l}{b}\right) + 2{,}439\left(\frac{2l}{b}\right)^2\right];$

- для зразка типу 2 при $0{,}6D \le d \le 0{,}7D$ і $2_S < 0{,}08$

$$K_Q = \frac{P_Q}{D^{3/2}} \cdot \left(Y_2' + Y_2''\right)$$

де $Y_2' = 6.53\left[1 - 1.8167\left(\frac{d}{D}\right) + 0.9167\left(\frac{d}{D}\right)^2\right]$, $Y_2'' = 3{,}1\left(\frac{2_S}{d}\right)$;

- для зразка типу 3 при $045 \le l \le 0{,}55b$

$$K_Q = \frac{P_Q}{t\sqrt{\cdot b}} \cdot Y_3$$

де $Y_3 = 13{,}74\left[1 - 3{,}38\left(\frac{l}{b}\right) + 5{,}572\left(\frac{l}{b}\right)^2\right]$

- для зразка типу 4 при $0{,}45b \le l \le 0{,}55b$

$$K_Q = \frac{P_Q \cdot l}{t \cdot b^{3/2}} \cdot Y_4$$

де $Y_4 = 3{,}494\left[1 - 3{,}396\left(\frac{l}{b}\right) + 5{,}839\left(\frac{l}{b}\right)^2\right]$

Значення функцій $Y_1, Y_2', Y_2'', Y_3, Y_4$ у формулах (2.1—2.4) знаходяться у табл. 2.3—2.5.

Поправочные функции Y_1 для образцов типа 1

$2l/b$	Y_1	$2l/b$	Y_1	$2l/b$	Y_1	$2l/b$	Y_1
0,300	0,727	0,350	0,800	0,400	0,879	0,450	0,962
0,305	0,734	0,355	0,808	0,405	0,887	0,455	0,971
0,310	0,741	0,360	0,816	0,410	0,895	0,460	0,980
0,315	0,748	0,365	0.824	0,415	0,904	0,465	0,988
0,320	0,756	0,370	0,832	0,420	0,912	0,470	0,997
0,325	0,763	0,375	0,839	0,425	0,920	0,475	1,003
0,330	0,770	0,380	0,847	0,430	0,928	0,480	1,014
0,335	0,778	0,385	0,855	0,435	0,937	0,485	1,024
0,340	0,785	0,390	0,863	0,440	0,945	0,490	1,032
0,345	0,793	0,395	0,871	0,445	0,954	0,495	1,041
						0,500	1,050

Поправочные функции Y_2' и Y_2'' для образцов типа 2

d/D	Y_2'	d/D	Y_2'	$2s/d$	Y_2''
0,600	1,57	0,650	1,35	0	0
0,605	1,54	0,655	1,33	0,01	0,03
0,610	1,52	0,660	1,31	0,02	0,06
0,615	1,50	0,665	1,29	0,03	0,09
0,620	1,47	0,670	1,27	0,04	0,12
0,625	1,45	0,675	1,25	0,05	0,16
0,630	1,43	0,680	1,23	0,06	0,19
0,635	1,41	0,685	1,21	0,07	0,22
0,640	1,39	0,690	1,19	0,08	0,25
0,645	1,37	0,695	1,17		
		0,700	1,16		

Поправочные функции Y_3, Y_4 для образцов типа 3 и 4

l/b	Y_3	Y_4	l/b	Y_3	Y_4
0,450	8,34	2,29	0,500	9,66	2,66
0,455	8,46	2,32	0,505	9,81	2,70
0,460	8,58	2,35	0,510	9,97	2,75
0,465	8,70	2,39	0,515	10,13	2,79
0,470	8,82	2,42	0,520	10,29	2,84
0,475	8,95	2,46	0,525	10,46	2,89
0,480	9,09	2,50	0,530	10,63	2,94
0,485	9,22	2,54	0,535	10,81	2,99
0,490	9,37	2,58	0,540	10,99	3,04
0,495	9,51	2,62	0,545	11,17	3,09
			0,550	11,36	3,14

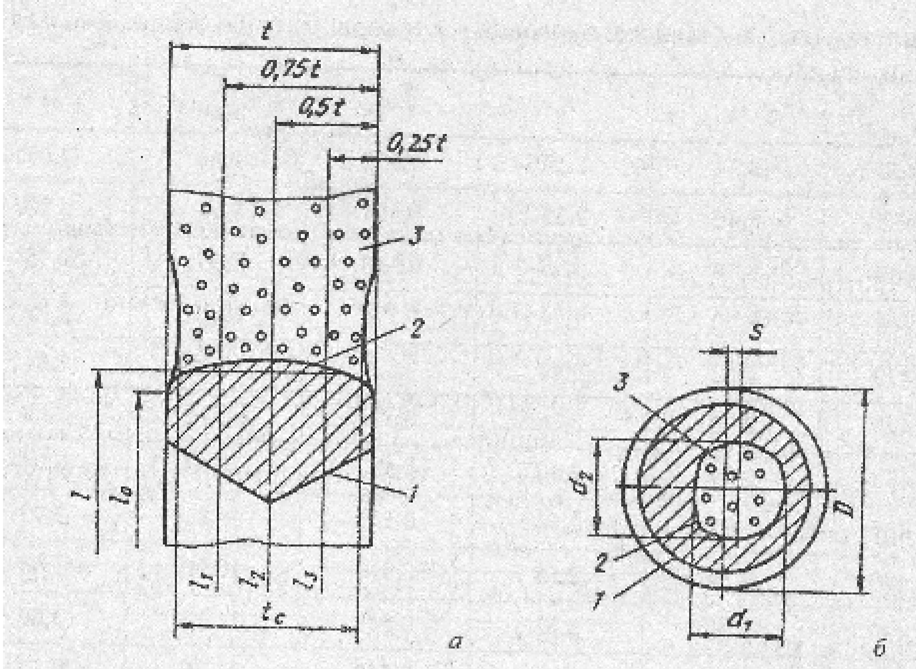
11.2.2 Результати випробувань

Вимірювання довжини тріщини

Довжину l в плоских зразках типів 1, 3, 4 обчислюють по зламу як середнє арифметичне не менше ніж в трьох точках на контурі (фронті) втомної (початковій) тріщини, розташованих через рівні проміжки по товщині зразка, виключаючи бічні поверхні (рис. 2.14, а).

В зразку типу 2 виміряють відстань s між центрами поперечного перетину і статичного долому зразка, а також діаметри контура втомної тріщини в двох взаємно перпендикулярних напрямах, і обчислюють їх середнє значення ***d*** (рис. 2.14, б).

Статичне (повільний) підростання тріщини Δl обчислюють як середнє арифметичне вимірювань не менше ніж в п'яти точках на контурі тріщини, що підросла, розташованих на рівних проміжках по товщині зразка, виключаючи бічні поверхні.



Рис, 2.14. Схеми зламів: *а* - плоских зразків типів 1, 3 і 4; *би* - циліндричного зразка типу 2 (1- границя надрізу. 2 - контур втомної тріщини; 3 - статичний долом)

Критичні коефіцієнти інтенсивності напружень

Спочатку обчислюють допоміжний коефіцієнт за формулами (2.1 — 2.4), у які підставляють силу P_Q.

Отримана величина K_Q дорівнює в'язкості руйнування для плоских зразків, якщо задовольняються умови коректності (достовірності). Ці умови такі: повинна виконуватися умова $\boldsymbol{P_c \le 1.1 P_Q}$ і одночасно додатково

$$\text{або} \quad t \ge 2{,}5\left(\frac{K_Q}{\sigma_{0{,}2}}\right)^2 \quad \text{і} \quad \frac{t - t_C}{t}100\% \le 1.5\%$$

$$\text{або} \quad v_C \le 1{,}2 v_Q .$$

Для циліндричних зразків умови достовірності аналогічні, але перша додаткова умова записується у вигляді:

$$D \ge 2{,}3\left(\frac{K_Q}{\sigma_{0{,}2}}\right)^2 \quad \text{і} \quad d \ge 1{,}6\left(\frac{K_Q}{\sigma_{0{,}2}}\right)^2 .$$

Умови достовірності обмежують розміри пластичної зони перед вершиною тріщини. Це потрібно для упевненості в крихкому стані зразка при руйнуванні. Тоді можна вважати, що в'язкість руйнування K_{Ic} є властивість матеріалу, однакова як в зразка, так і в деталі.

Якщо умови достовірності визначення K_{Ic} не задовольняються, то слід випробувати зразки більшої товщини. Якщо це неможливо, то доведеться обмежитися величиною $\boldsymbol{K_Q}$ або скористатися іншими коефіцієнтами, що приводяться далі.

Значення K_C^* обчислюють по формулах (2.1—2.4), але із заміною на $\boldsymbol{P_Q}$ на $\boldsymbol{P_C}$. Отримані значення $\boldsymbol{K_Q}$ приймають рівними K_C^* без перевірки на достовірність. За визначенням ця величина є границя тріщиностійкості $\boldsymbol{I_C}$ при $\boldsymbol{l/b = 0.5}$ (у відповідності з кресленням).

Нетто-напруження, σ_{c0} відповідне точці Q, обчислюють для зразків різних типів за формулами:

- для зразків типу 1 $\sigma_{c0} = \dfrac{P_Q}{(b-2l)t}$;
- для зразків типу 2 $\sigma_{c0} = \dfrac{4P_Q}{\pi d^2}$
- для зразків типу 3 $\sigma_{c0} = \dfrac{P_Q}{(b-2l)t}\left[1 + \dfrac{3(b+l)}{b-l}\right]$;
- для зразків типу 4 $\sigma_{c0} = \dfrac{6P_Q b}{(b-2l)^2 t}$;

Обчислення K_C при $\boldsymbol{\sigma_{c0}}$ менше $\boldsymbol{0.8\sigma_{0.2}}$, ведуть за формулами (2.1—2.4) із заміною $\boldsymbol{P_Q}$ на $\boldsymbol{P_C}$.

У формули (2.1—2,4) при обчисленні, $\boldsymbol{K_{1C}, K_C^*, K_C}$ підставляють довжину початкової втомної тріщини, заміряну на зламі зразка так, як вказано вище.

Обчислення $\boldsymbol{K_{QT}}$ при σ_{c0} менше $\boldsymbol{0.8\sigma_{0.2}}$ виконують за формулами (2,1 - 2.4) при силі $\boldsymbol{P_Q}$. Довжину тріщини у ці формули підставляють з урахуванням пластичної поправки Ірвіна, а саме:

$$l_T = l + \frac{1}{\gamma\pi}\left(\frac{K_Q}{\sigma_{0,2}}\right)^2,$$

де $\boldsymbol{\gamma = 210\,t^* + 1{,}8}$ при $\boldsymbol{t^*}$ від $\boldsymbol{10^{-3}}$ до $\boldsymbol{20 \cdot 10^{-3}}$ і $\boldsymbol{\gamma = 6}$ при $\boldsymbol{t^*}$ більше $\boldsymbol{20{\bullet}10^{-3}}$.

Тут t^* - безрозмірне число, рівне товщині у метрах. Коефіцієнт враховує перехід від плоского напруженого стану до плоскої деформації.

Розкриття вершини тріщини

Величину пластичного розкриття тріщини δ_C обчислюють для точок С діаграм $\boldsymbol{P-v}$ виду I-IV $\boldsymbol{P-v}$ за формулами:

- для зразків типів 1 і 2

$$\delta_C = \frac{K_C^{2*}\left(1-\mu^2\right)}{2\sigma_{0,2}E} + v_{pC}; \tag{2.5}$$

- для зразків типу 3

$$\delta_C = \frac{K_C^{2*}\left(1-\mu^2\right)}{2\sigma_{0,2}E} + \frac{(b-l)}{3z+1{,}75b+2l}\cdot v_{pC}; \tag{2.6}$$

- для зразків типу 4

$$\delta_C = \frac{K_C^{2*}\left(1-\mu^2\right)}{2\sigma_{0,2}E} + \frac{(b-l)}{z+0{,}4b+0{,}6l}\cdot v_{pC}; \tag{2.7}$$

де K_C^* обчислюється, як вказано вище, а знаходиться графічно з одержаних діаграм $P-v$.

Значення величини v_{pC} знаходять таким чином. На діаграмі $\boldsymbol{P-v}$ з точки С проводять пряму, паралельну початковій лінійній ділянці діаграми, до перетину з віссю $\boldsymbol{v}$. Абсциса точки перетину є величина v_{pC}. Відстань $\boldsymbol{z}$ - між торцевою поверхнею зразків типів 3 або 4 і кромками накладних опорних призм. У цих формулах перший доданок - розкриття вершини тріщини від локальної пластичної течії в рисій околиці вершини тріщини, а другий - від повороту однієї половини зразка як цілій, щодо іншої, навкруги центру повороту, який лежить приблизно посередині нетто перетину.

Критичний інваріантний інтеграл

Це випробування проводять на зразках типів 3 або 4. Перший зразок доводять до руйнування, при цьому знаходять, до якого виду відноситься одержана діаграма. У випадку, коли діаграма деформації має вигляд 1, то критичне значення J-интеграла обчислюють за формулою:

$$J_C = \frac{\left(1-\mu^2\right)\cdot\left(K_C^*\right)^2}{E} + \frac{A_{pC}}{(b-l)t}\cdot\frac{\kappa}{k}, \tag{2.8}$$

де K_C^* обчислюється як вказано вище (див. разд. 2.4.2); $\boldsymbol{A_{pC}}$ - робота, відповідна пластичній частині площі під діаграмою $\boldsymbol{P-v}$ на момент початку зростання тріщини, що за припущенням відповідає точці С (рис, 2.15); $\boldsymbol{l}$ - початкова довжина тріщини.

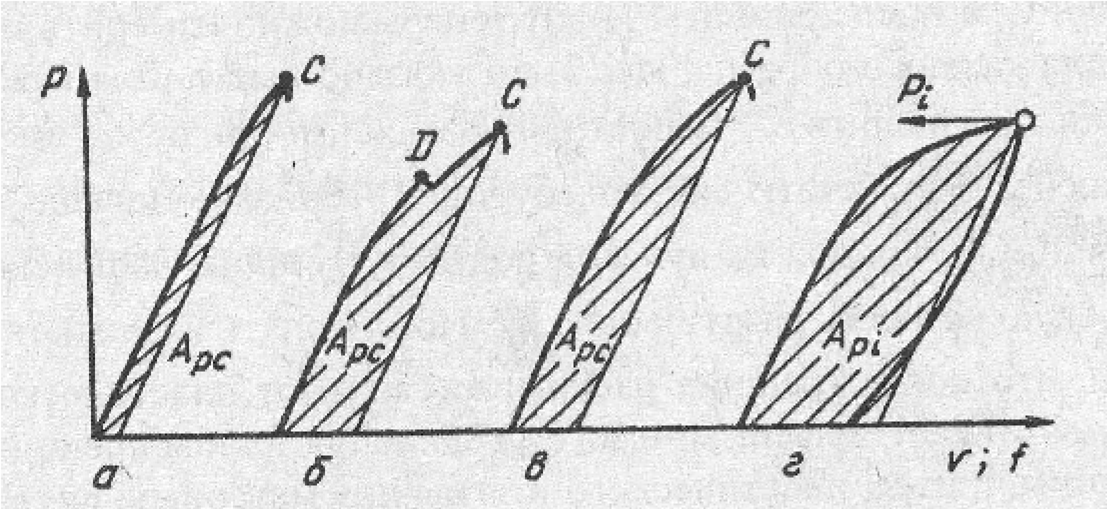


Рис. 2.15. Схема розрахунку роботи по заштрихованій області діаграми $P-v$ або $\boldsymbol{P-f}$:а, б, в — відповідно діаграми I, II, III типу; г — при розвантаженні зразка.

Значення κ і k формулі (2.8) обчислюються таким чином:

- для зразків типу 3 за формулами:

$$\kappa = 2 + 0{,}522 \cdot \frac{b-l}{b},\ k = 1 + \frac{r_y}{l + 0{,}1(b-l)},\ r_y = 0{,}25b + z\,;$$

- для зразків типу 4 приймають к=2, $k=1$:

Якщо при первинних діаграмах вигляду *II* і *Ш* повторне випробування іншого (але такого ж) зразка відбулося при зміщенні в межах від $\mathbf{0.9}\boldsymbol{v_C}$ до $\boldsymbol{v_C}$, то для останнього зразка величину також підраховують за формулою (2.8) У випадку діаграми вигляду II,III, або IV тріщина звичайно починає рости перед точкою С . При в'язкому руйнуванні типовою буде діаграма виду IV . Де саме на діаграмі знаходиться початок зростання тріщини невідомо, і цей момент (точку на діаграмі) доводиться визначати на підставі вимірювання підростання тріщини на декількох зразках (скажімо, п'ять-сім однакових зразків). Адже після старту тріщина поволі росте із зростанням сили і навіть після максимуму навантаження. При цьому кожній точці діаграми відповідає своя довжина тріщини, що росте. Тому і потрібно декілька зразків. Один з них навантажують до сили за точкою С (максимум сили), інші - до сили різних точок перед точкою С . При цьому зразки ще не зруйновані. Тепер всі ці зразки розвантажують і виймають з випробувальної машини. У всіх зразках тріщина має різну довжину. Далі зразки ламають, щоб на зламі подивитися, як виросла тріщина. Але перед цим тріщину треба пофарбувати (а інакше її на зламі не побачиш). Для цього зразок можна нагріти до 600 ˚С, а після зламати. Після цього можна заміряти підростання тріщини Δl для кожного зразка, як вказувалося вище. Для кожного із зразків можна обчислити $\boldsymbol{J_i}$, і побудувати залежність $\boldsymbol{J_i}$ від Δl (она буде зростаючою). Це, до речі сказати, буде, $\boldsymbol{J_R}$-крива. Екстраполяція, $\boldsymbol{J_R}$-кривої на нульове підростання тріщини визначає пружнопластичну в'язкість руйнування J_C. Але коли тріщина розвивається, то у зв'язку з пластичними деформаціями у вершині виникає ефект додаткового збільшення довжини тріщини за рахунок втягування матеріалу у об'єм пластини (аналогічно утворенню шийки при розриві зразка). Для врахування цього ефекту проводять лінію від початку координат згідно з рівняннями

$J = (\sigma_{0,2} + \sigma_B)\Delta l$ при товщині не більше 30 *мм*;

$J = (\sigma_{0,2} + \sigma_B)\dfrac{\Delta l}{2}$ при товщині більше 30 мм

Точка перетину $\boldsymbol{J_R}$ з лінією затуплення і дає величину J_C (рис, 2.16).

Величина J_C дорівнює $\boldsymbol{J_{IC}}$, якщо виконуються умови достовірності:

$$l \geq \beta_J \frac{J_C}{\sigma_{0,2} + \sigma_B},$$

де $\beta_J = 200$ при і при $\boldsymbol{\sigma_{0.2} / \sigma_B < 0.6}$ **і** $\boldsymbol{\beta = -375\frac{\sigma_{0.2}}{\sigma_B} + 425}$ **при** $\boldsymbol{\sigma_{0.2} / \sigma_B \geq 0.6}$.

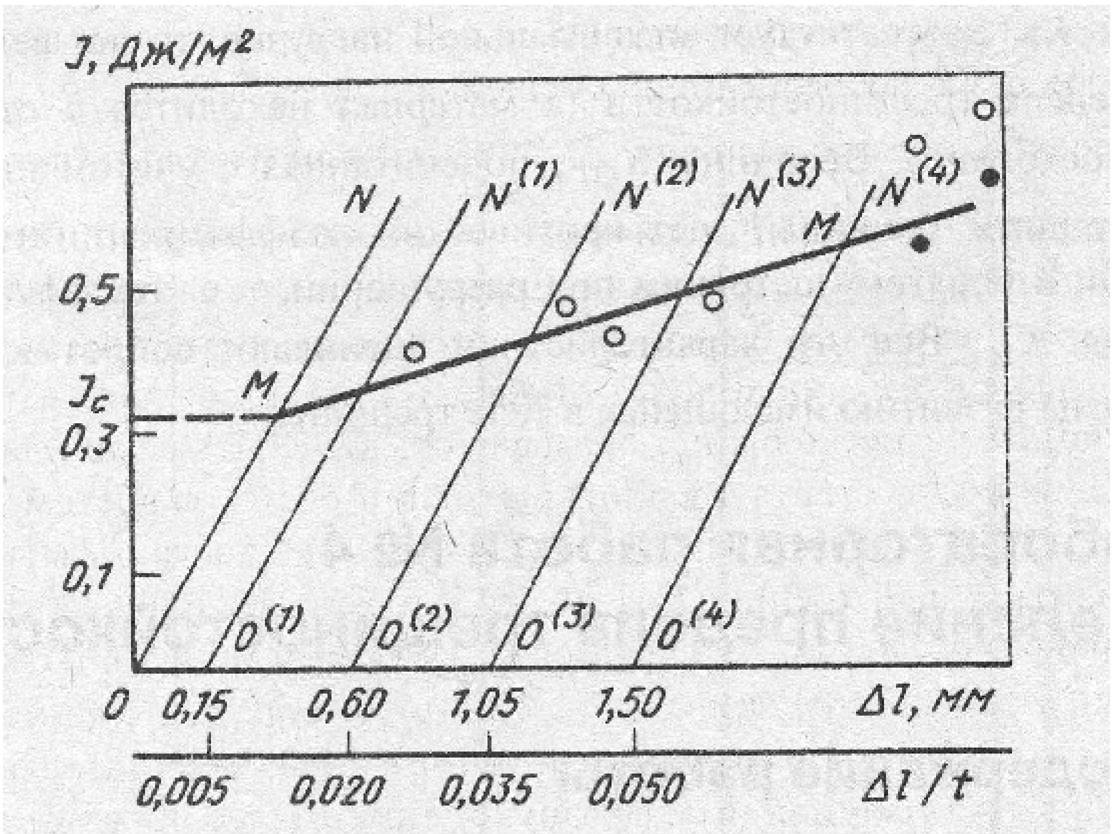


Рис.2.16. Діаграма $J - \Delta l$ для розрахунку (закреслені точки – скореговані значення)

Пружнопластична в'язкість руйнування J_{IC} аналогічна в'язкості руйнування при плоскій деформації, і згідно з ГОСТ 25.506-85, допускається їх взаємний перерахунок за формулою:

$$J_{Ic} = \frac{1-\mu^2}{E}(K_{Ic})^2.$$

11.2.3 Висновки

Для експериментального визначення характеристик тріщиностійкості використовують п'ять типів зразків (тип 5 використовують для визначення границі тріщиностійкості). Характеристикою матеріалу вважають K_{Ic}. Решта характеристик визначається або в спеціальних цілях, або внаслідок неможливості знаходження K_{Ic}. При в'язкому руйнуванні характеристикою тріщиностійкості служить пружнопластична в'язкість руйнування J_C або розкриття у вершині тріщини δ_C. Умовний критичний коефіцієнт інтенсивності напружень K_C^* не пов'язаний з видом руйнування. Величини K_C і K_{QT} знаходять при обмеженій пластичній течії, оскільки прийнято, що $\sigma_{C0} < 0.8\sigma_{0.2}$.

Оскільки K_C відповідає максимальному навантаженню, то ця величина є аналогом границі тріщиностійкості (а матеріал знаходиться у відносно крихкому стані). Величина K_{QT}, підрахована з урахуванням пластичної зони у вершини тріщини, дає критичний коефіцієнт інтенсивності напружень в пружному стані при руйнуванні, тобто це аналог в'язкості руйнування K_{IC}. Всі ці характеристики оцінюють опір матеріалу зразка розвитку тріщини, що є в тілі.

11.3 Визначення границі тріщиностійкості

Границя тріщиностійкості - кількісна міра опору матеріалу розповсюдженню тріщини, є критичним умовним коефіцієнтом інтенсивності напружень K_C^*, визначеним при максимальному навантаженні, яке витримується зразком з даною довжиною тріщини l.

Границю тріщиностійкості визначають згідно з ГОСТ 25.506-85 випробуванням на розтяг серії плоских зразків з різними довжинами тріщин. Зразки виготовляють з тріщинами різної довжини в діапазоні $0 \le \frac{l}{b} \le 0{,}6$. Для кожного зразка з конкретною довжиною тріщини одержують межу тріщиностійкості. Можливі зразки типів 1, 4 і 5 (див. рис, 2.17).

В кожному випробуванні (зразків з різною довжиною тріщини) фіксується тільки руйнуюче навантаження, за яким обчислюється границя тріщиностійкості, за формулою для коефіцієнта інтенсивності напружень. Обладнання для вимірювання розкриття тріщини і побудови діаграми $P - v$ не потрібне.

Приведемо формулу для зразка типу 5:

$$I_c = \frac{P_C \cdot l^{\frac{1}{2}}}{t \cdot b} \cdot Y_5' \tag{2.10}$$

де $Y_5' = 1{,}99 - 0{,}41\frac{l}{b} + 18{,}70\left(\frac{l}{b}\right)^2 - 38{,}48\left(\frac{l}{b}\right)^3 + 53{,}85\left(\frac{l}{b}\right)^4.$

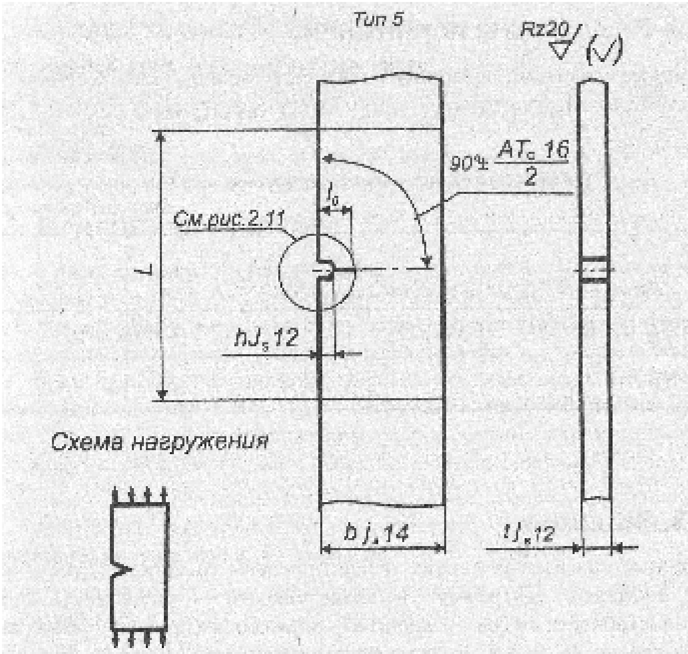


Рис. 2.17, Схема зразка типу 5 для визначення характеристик тріщиностійкості; $\boldsymbol{b > 5t}$, $\boldsymbol{L \geq 2b, h = 0.1b}$; $\boldsymbol{L}$- відстань між частинами зразка, які скріплюються у захватах.

За відомими силами $\boldsymbol{P_C}$, для зразків з різними довжинами тріщин і без них ($l = 0$), визначають номінальне руйнуюче напруження σ_C. Для зразка типу 5 за формулою:

$$\sigma_C = \frac{P_c}{t \cdot b}.$$

Замість σ_C при $\boldsymbol{l}$=0 допустимо використовувати тимчасовий опір $\boldsymbol{\sigma_b}$ при заданій температурі і даній схемі навантаження.

Результати випробувань

Результати випробувань оформлюють у вигляді таблиці (табл. 2.6).

Таблиця 2.6. Руйнуючі напруження і границя тріщиностійкості для різних довжин тріщин

$\frac{l}{b}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$\sigma_C, МПа\sqrt{м}$							
$I_C, МПа\sqrt{м}$							

Висновки

Знайдені при різних довжинах тріщин границі тріщиностійкості дозволяють побудувати діаграму тріщиностійкості - залежність границі тріщиностійкості від руйнуючого напруження (при необхідності від довжини тріщини). Ця діаграма дозволяє оцінювати матеріал і розраховувати деталі машин на тріщиностійкість при крихкому, перехідному і в'язкому руйнуваннях. При цьому не обов'язкове попереднє знання виду руйнування. В розрахункових співвідношеннях використані звичайні коефіцієнти інтенсивності напружень, але відповідна характеристика матеріалу ускладнена (вона стала функцією руйнуючої напруження).

За способом визначення границі тріщиностійкості видно аналогію з границею міцності. І ту і іншу характеристику визначають по максимальній силі, що витримується зразком. І в тому і в іншому випадку не звертають уваги на попередню (перед максимумом навантаження) пластичну течію і на вигляд руйнування. Різниця тільки в тому, що в одному випадку зразок гладкий (без тріщини), а в іншому зразок з тріщиною. Таким чином, границя тріщиностійкості це границя міцності зразка з тріщиною.

11.4 Визначення характеристик тріщиностійкості при циклічному навантаженні

Швидкість росту тріщини і характеристики опору матеріалу розвитку тріщини при циклічному навантаженні визначають в умовах застосовності лінійної механіки руйнування. Отже, напружено-деформований стан у вершині тріщини характеризується коефіцієнтом інтенсивності напружень. Характеристики тріщиностійкості (разом з другими характеристиками механічних властивостей) можуть бути використані для наступних цілей:

- висновки про опір матеріалу розвитку тріщини і визначення впливу на нього різних металургійних, технологічних і експлуатаційних чинників;
- порівняння матеріалів при обгрунтовуванні їх вибору для машин і конструкцій;
- контролю якості матеріалів;

- оцінки довговічності елементів конструкцій на підставі даних про їх дефектність і напружений стан;
- встановлення критеріїв неруйнівного контролю і аналізу причин руйнування конструкцій.

Результати випробувань

Випробування полягають в послідовному вимірюванні (при заданих параметрах циклу навантаження) довжини тріщини l, що росте, і числа циклів навантаження N. За цими даними можна побудувати залежність довжини тріщини від числа циклів навантаження. Далі обчислюють швидкість росту тріщини v у вигляді відношення $v = \frac{\Delta l}{\Delta N} \cong \frac{dl}{dN}$ як середній приріст довжини тріщини за один цикл. Потім встановлюють залежність швидкості росту тріщини від величини, яка характеризує напружено-деформований стан в околі її вершини. Звичайно в цій ролі виступає коефіцієнт інтенсивності напружень. Одержана залежність використовується для визначення параметрів цієї залежності — характеристик опору розвитку тріщини (тріщиностійкість) матеріалу при циклічному навантаженні за простим періодичним законом.

Коефіцієнт інтенсивності напружень K використовують, коли розмір пластичної зони у вершини тріщини приблизно на порядок менше довжини тріщини (і відстані від її вершин до краю зразка).

Залежність швидкості росту тріщини від максмального коефіцієнта інтенсивності напружень циклу $K_{\max}$ або розмаху $\Delta K = K_{\max}(1 - R)$ називають діаграмою втомного руйнування (діаграмою циклічної тріщиностійкості). Перепад коефіцієнта інтенсивності напружень за один цикл визначається перепадом напружень (який сталий), а зростання тріщини з числом циклів приводить до росту коефіцієнта інтенсивності напружень. Діаграму циклічної тріщиностійкості будують в подвійних логарифмічних координатах. Звичайно она має S-образний вигляд (рис. 2.18) і складається з двох криволінійних ділянок низьких (звичайно $v < 10^{-8}\,м/цикл$) і високих (звичайно $v = 10^{-6}\,м/цикл$) швидкостей росту тріщини, а також середньої ділянки, що апроксимується прямою.

Оскільки коефіцієнт асиметрії циклу R сталий, то діаграми втомного руйнування, побудовані на базі ΔK і, $K_{\max}$, еквівалентні і розрізняються лише масштабом по осі абсцис, і є зміщеними відносно один одної на $\lg(1 - R)$.

Діаграма втомного руйнування дає інформацію про опір розвитку тріщини матеріалу при циклічному навантаженні. По ній встановлюють наступні основні характеристики втомної тріщиностійкості матеріалу:

- пороговий коефіцієнт інтенсивності напружень — максимальне значення найбільшого коефіцієнта інтенсивності напружень циклу, при якому тріщина не розвивається протягом заданого числа циклів;

- критичний коефіцієнт інтенсивності напружень (циклічна в'язкість руйнування) — найбільший коефіцієнт інтенсивності напружень циклу, при якому наступає руйнування зразка;

- K_C^* і n - параметри залежності

$$v = 10^{-7}\left(\frac{K_{\max}}{K^*}\right)^n \frac{м}{цикл} \qquad (2.11)$$

Яка апроксимує середню ділянку діаграми втомного руйнування.

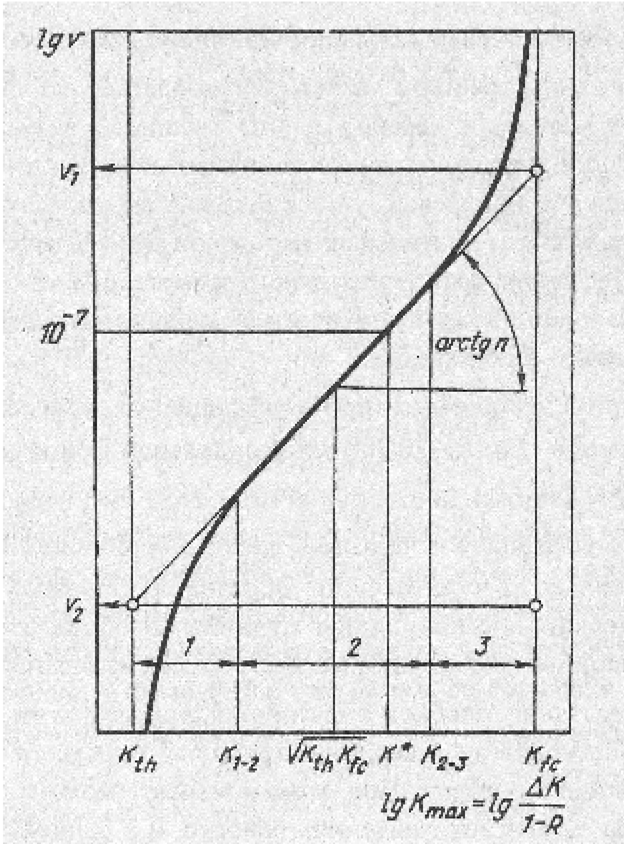


Рис. 2.18. Схематичне зображення діаграми втомного руйнування

Формулу (2.11) можна представить у вигляді формули Паріса

$$v = CK_{\max}^n, \qquad (2.12)$$

де C є пов'язаним з характеристиками n і K^* формулою

$$C = 10^{-7}\left(K^*\right)^{-n}, \left(Па\sqrt{м}\right)^{-n} \frac{м}{цикл}$$

Порівняльною характеристикою опору розвитку тріщини може також бути діаграма живучості – залежність руйнуючого числа циклів від початкового (при $l = l_0$) коефіцієнта інтенсивності напружень циклу $K_{\max}^0$. Різні значення $K_{\max}^0$

досягають зміною максимального навантаження циклу при одній і тій же початковій довжині тріщини l_0.

Можна використовувати зразки для визначення статичних характеристик. Для вимірювання тріщини може використовуватися будь-який метод. Відомий такі методи вимірювання довжини тріщини: візуальний, різниці електричних потенціалів, механічної податливості, датчиків послідовного розриву, ультразвукової, акустичної емісії і ін. Найбільш поширеним є візуальний метод при 10 - 40-кратному збільшенні за допомогою катетометра або пересувного мікроскопа, фіксуючого положення кінця тріщини на поверхні зразка по відношенню до заздалегідь нанесених міток.

Звичайно експеримент проводять при коефіцієнті асиметрії $\boldsymbol{R = (0 - 0.1)}$, частоті навантаження $\boldsymbol{f = 10 - 20}$ ***Гц***, синусоїдальній формі циклу і при температурі $17 - 23^{\circ} C$.

Якщо товщина зразка з наскрізною тріщиною більше 0.15***b***, то довжину тріщини виміряють по обидві сторони зразка. В зразках з центральною тріщиною виміряють обидві половини тріщини. В обох випадках довжину тріщини визначають як середнє арифметичне всіх вимірювань.

В процесі випробувань плоских зразків спостерігають за появою і розвитком пластичної зони у вершини тріщини, якщо її видно на полірованій поверхні зразка, При цьому відзначають момент, коли найбільший її розмір збільшився до значення, рівного 0,1 довжини тріщини і 0,1 відстані вершини тріщини від країв зразка. Крім того, номінальні нетто-напруження у зразку, відповідні максимальному навантаженню циклу, не повинні перевищувати 80% від границі текучості. Коефіцієнти інтенсивності напружень, отримані при порушенні цих вимог, є умовними і при визначенні характеристик тріщиностійкості не використовуються.

Для визначення порогового коефіцієнта інтенсивності напружень $\boldsymbol{K_{th}}$, найбільше навантаження циклу знижують і знаходять його значення, при якому тріщина не росте протягом заданого числа циклів. Для визначення циклічної в'язкості руйнування $\boldsymbol{K_{fc}}$ проводять випробування при зростаючому коефіцієнті інтенсивності напружень циклу, фіксуючи навантаження і довжину тріщини, відповідні початку долому зразка.

Відзначимо, що значення швидкості росту тріщини залежить від методу обчислення.
Можна визначати швидкість росту тріщини за співвідношенням:

$$v_i = \frac{l_{i+1} - l_i}{N_{i+1} - N_i}$$

у точці, що відповідає середній довжині тріщини $\frac{l_{i+1} + l_i}{2}$.

Можна також визначати швидкість росту тріщини графічним диференціюванням, для чого використовують графік зростання тріщини у функції числа циклів. На графіку через певні інтервали довжин тріщин відмічають точки з ординатами l_i і проводять до них дотичну, тангенс кута нахилу якої (до осі абсцис N) дорівнює в заданому масштабі швидкості росту тріщини v_i.

Д л я кожної швидкості росту тріщини за відомим навантаженням і довжині тріщини визначають за допомогою відомих формул найбільше значення або розмах коефіцієнта інтенсивності напружень. Отримані швидкості і відповідні їм розмахи коефіцієнта інтенсивності напружень дозволяють п о б у д у в а т и (в л о г а р и ф м і ч н и х ш к а л а х) к р и в у - д і а г р а м у в т о м н о г о руйнування. Рекомендується масштаб діаграми по оси абсцис (вісь $\lg K_{\max}$ або $\lg \Delta K$) вибирати в 3-3,5 рази більшим, ніж по осі ординат(вісь $\mathbf{lg}\, v$).

Висновки

Відомо, що стадія розповсюдження тріщини займає іноді значну долю від загальної довговічності зразка або деталі. Тому характеристики циклічної тріщиностійкості займають суттєву частину в загальній ієрархії механічних властивостей матеріалів. Знаючи швидкість росту тріщини як функції коефіцієнта інтенсивності напружень, а, отже, і довжини тріщини, можна шляхом інтегрування визначити ресурс зразка або виробу до повного руйнування. При використанні коефіцієнта інтенсивності напружень припускають пружний стан тіла з тріщиною, що росте. Проте часто тріщина просувається усередині пластичної зони в заздалегідь пластично деформованому матеріалі. Тоді можливе використання параметрів нелінійної механіки руйнування. Наприклад, можна виразити швидкість росту тріщини у виразі (2.12) не через ΔK, а через ΔJ, приймаючи до уваги, що – J- інтеграл можна обчислювати при великій пластичній зоні. Проте слід мати у вигляду, що пластичні зони в зразку і в деталі можуть виявитися різними, що відобразиться на швидкості, що визначається.

1. ГОСТ 25.506.85. Методы механических испытаний металлов. Определение характеристик трещиностойкости (вязкости разрушения) при статическом нагружении. – М: Изд.стандартов, 1985.

ЛЕКЦІЯ 11
Використання чисельних методів для визначення напруженого стану при наявності тріщин. Метод скінченних елементів

Для обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень доводиться розв'язувати задачі для тіл складної конфігурації з тріщинами, для областей з розрізами (тріщинами), що пов'язано зі значними математичними труднощами внаслідок наявності особливих (сингулярних) точок (де напруження прямують до нескінченності). Більшість цих задач ефективно може бути розв'язана тільки з застосуванням ЕОМ.

Труднощі розв'язання задач механіки тріщин обумовили широке використання чисельних методів. Найбільш поширеними серед них є методи скінченних і граничних елементів. Метод скінчених елементів (МСЕ) є найпоширенішим серед існуючих методів розрахунку конструкцій. Це пояснюється універсальністю методу, наявністю великої кількості обчислювальних програм, які реалізують МСЕ і, що головне, – цей метод має разом із глибоким математичним обґрунтуванням зрозумілу інженерну інтерпретацію.

У механіці руйнування МСЕ використовується у декількох напрямках. Перший – це визначення параметрів, які визначають стан тріщини, таких як коефіцієнт інтенсивності напружень, енергетичні критерії; другий – моделювання процесів руйнування тіл з тріщиною. Третій напрям – аналіз міцності конструкцій з точки зору опору крихкому руйнуванню.

Методика використання МСЕ у задачах механіки руйнування нічим не відрізняється від методики аналізу напруженого стану в інших задачах механіки за винятком необхідності якомога більш точного моделювання поля тензора напружень біля вершини тріщини. Це потребує, по-перше, використання рівнянь теорії пластичності, а по-друге – використання дуже густої сітки елементів і скінчених елементів спеціальних типів.

І перше, і друге суттєво ускладнюють методику використання МСЕ при аналізі напруженого стану конструкцій з тріщинами. Зазначимо, однак, що згідно з наведеним вище, при визначенні коефіцієнтів інтенсивності напружень можна використовувати лінійні фізичні залежності.

При створенні дискретної моделі конструкції на першому етапі розглядають конструкцію при відсутності тріщин, після чого у місцях підвищених напружень (концентрації) перебудовують сітку елементів. На цьому етапі використовуються спеціальні елементи, зокрема ізопараметричні зі зміщеними вузлами, сингулярні елементи з тріщиною, елементи зі змінною кількістю вузлових точок і т. п.

11.1 Основи методу скінченних елементів

Розглянемо тіло, завантажене об'ємними $\mathbf{p}_V$ і поверхневими $\mathbf{p}_S$ силами на частині поверхні тіла S_1. На поверхні $S_2 = S - S_1$ прикладені геометричні в'язі

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S . \tag{11.1}$$

Скористаємося варіаційним рівнянням Лагранжа, згідно з яким для тіла, що знаходиться у рівновазі, сума робіт внутрішніх і зовнішніх сил на варіаціях можливих переміщень дорівнює нулю

$$\delta E = (-\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{S_1} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_S dS_1 + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_V dV) = 0 . \tag{11.2}$$

У (11.2) введено такі позначення:

ε, σ – вектори деформацій і напружень у довільній точці об'єму V

$$\varepsilon = [\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}]^T, \quad \sigma = [\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}]^T;$$

u – вектор переміщень довільної точки об'єму у напрямках вибраної системи координат $\mathrm{u} = [u \quad v \quad w]^T$;

$\mathrm{p}_S, \mathrm{p}_V$ – відповідно вектори поверхневих і об'ємних сил;

δ – знак варіації функції.

Нагадаємо, що "варіація функції" означає нескінченно малу зміну функції $\boldsymbol{y(x)}$ при фіксованому значенні незалежної змінної $\boldsymbol{x}$ (рисунок 11.1).

$$\boldsymbol{\delta y(x) = y_1(x) - y(x)} .$$

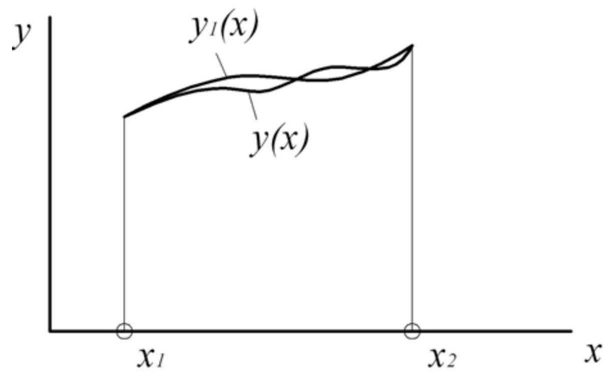


Рис.11.2

Розв'язок рівняння (11.2) будемо розшукувати у вигляді

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q} , \tag{11.3}$$

де $\mathbf{u} = \{u \;\; v \;\; w\}^T$ – вектор переміщень ;

$\mathbf{q}$ – вектор невідомих констант – узагальнених координат;

$\mathbf{N}$ – матриця апроксимаційних функцій.

Кожна з функцій **N** повинна задовольняти кінематичні умови (11.1). Усі функції **N** повинні задовольняти умови лінійної незалежності і повноти. Лінійна незалежність передбачає, що сума

$$\alpha_1 \mathbf{N}_1 + \alpha_2 \mathbf{N}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{N}_n$$

дорівнює нулю, тільки якщо всі коефіцієнти α_i дорівнюють нулю. Умова повноти вимагає, щоб ряд $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \ldots$ був повний, що забезпечувало б виконання умови збіжності розв'язку (11.3) до точного при збільшенні членів ряду, тобто

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i q_i \to \mathbf{u},$$

$$n \to \infty.$$

Крім того, функції $\mathbf{N}_i$ повинні бути диференційованими до порядку $p-1$, якщо найбільший порядок похідної у рівнянні Лагранжа – p, і неперервними по об'єму тіла.

Після підстановки (11.3) у (11.2), одержимо з урахуванням геометричних (Коші) і фізичних (Гук) залежностей

$$-\int_V (\mathbf{A}\,\delta\mathbf{u})^T \mathbf{C}\,\mathbf{A}\,\mathbf{u}\,dV + \int_{S_1} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{p}_S\,dS_1 + \int_V \delta\mathbf{u}^T \mathbf{p}_V\,dV = 0, \tag{11.4}$$

де **A** – матриця диференційних операторів, **C** – матриця пружних модулів.

Після інтегрування (11.4) матимемо

$$\delta\mathbf{q}^T (\mathbf{K}\,\mathbf{q} - \mathbf{F}_S - \mathbf{F}_V) = \mathbf{0}, \tag{11.5}$$

де

$$\mathbf{K} = \int_V (\mathbf{A}\,\mathbf{N})^T \mathbf{C}\,\mathbf{A}\,\mathbf{N}\,dV, \tag{11.6}$$

$$\mathbf{F}_S = \int_{S_1} \mathbf{N}^T \mathbf{p}_S\,dS, \quad \mathbf{F}_V = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{p}_V\,dV. \tag{11.7}$$

Матриця **K** називається матрицею жорсткості системи, матриці $\mathbf{p}_S$ і $\mathbf{p}_V$ – векторами відповідно поверхневих і об'ємних сил.

Враховуючи довільність варіацій $\delta\mathbf{q}$, з (11.5) одержимо систему алгебраїчних рівнянь відносно узагальнених переміщень

$$\mathbf{K}\,\mathbf{q} = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_V. \tag{11.8}$$

Розв'язок цієї системи алгебраїчних рівнянь розшукують за допомогою методів лінійної алгебри.

Таким чином, алгоритм методу скінченних елементів виявляється достатньо простим і складається з наступних кроків:

1) вибір координатних функцій N у розв'язку (11.3) для переміщень u;

2) підстановку (11.3) у варіаційне рівняння (11.2);

3) одержання системи алгебраїчних рівнянь (11.8);

4) розв'язання системи алгебраїчних рівнянь (11.8) відносно узагальнених координат q;

5) визначення переміщень за формулою (11.3);

6) визначення необхідних компонент напружень і деформацій за відомими компонентами переміщень з використанням відповідних формул теорії пружності.

Найбільш важким і відповідальним у розв'язанні варіаційних рівнянь є вибір пробних функцій, особливо для складних конструкцій. У розглянутому вище прикладі пробні функції були означені і неперервні на усій довжині балки (глобально означені). Для складних конструкцій підібрати глобальні функції практично неможливо. У зв'язку з цим перспективним виявився варіант використання кусково-неперервних функцій, апроксимуючих дійсні функції переміщень (рисунок 11.2). (***Локально означена – функція, яка не дорівнює нулю тільки в невеликій області з усього об'єму тіла. Стосовно стержня – це функція, яка не дорівнює нулю тільки на окремій ділянці. Глобально означена функція має ненульові значення по всьому об'єму, або на усій довжині, хоча при цьому не виключаються нульові ординати в окремих точках).***

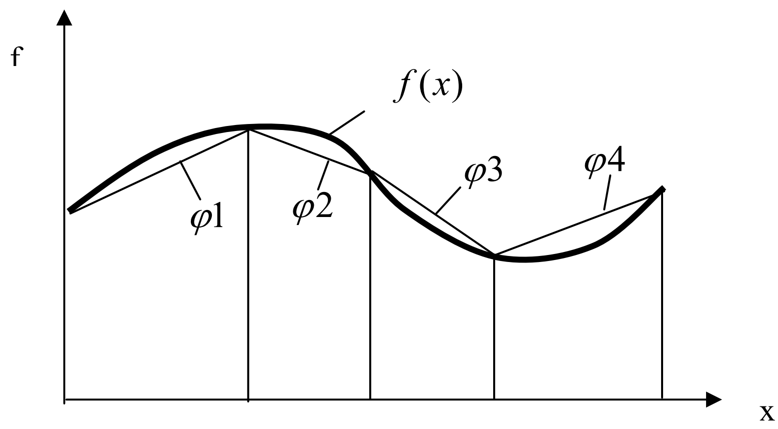


Рисунок 11.2 – Глобальна $f(x)$ і локальні $\varphi1, \varphi2, \varphi3, \varphi4$ функції

Розглянемо одну ділянку стержня довжиною a і знайдемо інтерполяційну функцію для випадку розтягу-стиску. Згідно з варіаційним рівнянням (11.2) функція переміщень повинна мати як мінімум першу похідну. Отже, це може бути лінійний поліном $u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$. Запишемо його так, щоб задовольнялись переміщення на кінцях ділянки (рис.11.3)

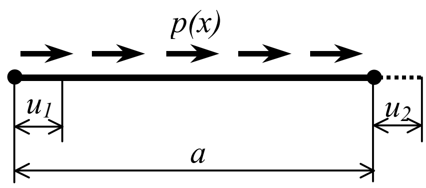


Рис. 11.3 – Ділянка стержня (скінченний елемент)

Для цього запишемо

$$u(0)=u_1,\quad u(a)=u_2,\quad або \begin{cases}\alpha_1=u_1,\\ \alpha_1+\alpha_2 a=u_2.\end{cases}$$

З цієї системи рівнянь маємо

$$\alpha_1=u_1,\quad \alpha_2=\frac{u_2-u_1}{a}.$$

Підставляючи це у вираз для u, одержимо

$$u=u_1\frac{a-x}{a}+u_2\frac{x}{a}. \tag{11.9}$$

У цьому виразі переміщення на кінцях ділянки є невідомими, а функції $N_1=\dfrac{a-x}{a}, N_2=\dfrac{x}{a}$ є пробними функціями. Характерним для вибраних функцій є те, що у крайніх точках ділянки кожна з них дорівнює одиниці або нулю (рисунок 11.4).

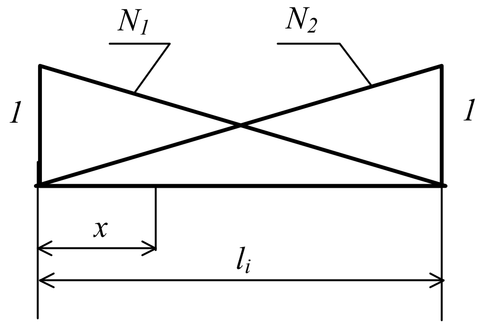


Рис. 11.4 – Пробні функції для елемента, працюючого на розтяг-стиск

Підставимо апроксимацію (11.8) у варіаційне рівняння (11.2), перейшовши до більш зручної матричної символіки

$$u=\begin{bmatrix}N_1 & N_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\mathbf{N}\mathbf{q}. \tag{11.10}$$

$$\varepsilon=\frac{d\mathrm{u}}{dx}=\frac{d\mathrm{N}}{dx}\mathrm{q},$$

$$\delta\mathbf{q}\left\{(EA\int_0^L\left(\frac{d\mathbf{N}}{dx}\right)^T\frac{d\mathbf{N}}{dx}dx)\mathbf{q}+\int_0^L\mathbf{N}^T\mathbf{p}dx\right\}=0. \tag{11.11}$$

Після інтегрування одержимо систему алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K}\,\mathbf{q}=\mathbf{F},$$

де

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}, \mathbf{F}=\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\end{bmatrix}, \mathbf{K}=\frac{EA}{a}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}.$$

(p_1,p_2 – сили у вузлах елемента, відповідні переміщенням u_1,u_2 (рис.11.3).

Матрицю **К** називають матрицею жорсткості скінченного елемента, працюючого на розтяг-стиск.

Наступним етапом є з’єднання елементів для апроксимації переміщень стержня в цілому. Продовжимо розв'язок, використовуючи матрицю жорсткості для кожної ділянки стержня. Наступним етапом має бути одержання матриці жорсткості стержня. Матриці кожного скінченного елемента необхідно поєднати, щоб одержати матрицю для стержня. Для цього розглянемо скінченно-елементну модель стержня і окремий скінченний елемент і прирівняємо відповідні переміщення у точках з’єднання (вузлових точках) (рисунок 11.5).

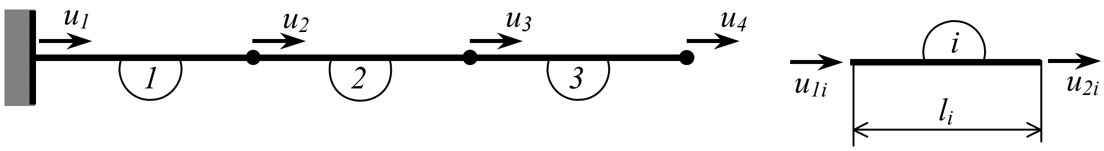


Рисунок 11.5 – Скінченно-елементна модель стержня і окремий скінченний елемент

Це можна виконати за допомогою таблиці, яку називають матрицею індексів.

Таблиця 11.1. Матриця індексів

№ елемента	Переміщення елемента	
	1	2
1	1	2
2	2	3
3	3	4

У відповідності з цією таблицею індекси елементів матриці жорсткості необхідно змінити на глобальні. Наприклад, для першого елемента

$$K_{11}^{(1)} = K_{11}, \quad K_{12}^{(1)} = K_{12}, \quad K_{22}^{(1)} = K_{22}, \quad K_{21}^{(1)} = K_{21}.$$

Для другого елемента

$$K_{11}^{(2)} = K_{22}, \quad K_{12}^{(2)} = K_{23}, \quad K_{22}^{(2)} = K_{33}, \quad K_{21}^{(2)} = K_{32}.$$

Для третього елемента

$$K_{11}^{(3)} = K_{33}, \quad K_{12}^{(3)} = K_{34}, \quad K_{22}^{(3)} = K_{44}, \quad K_{21}^{(3)} = K_{43}.$$

Складаючи компоненти з однаковими індексами, одержимо

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)}+K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)}+K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} \end{bmatrix}. \tag{11.12}$$

Після обчислення інтегралів матриця **K** матиме такий вигляд:

$$\mathbf{K}=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{11.13}$$

Для того, щоб врахувати закріплення, треба реалізувати умову $u_1 = 0$. Це можна зробити, викресливши у матриці жорсткості стержня (11.13) перші рядок і стовпець. Відповідно видалимо перші елементи матриць переміщень і зовнішніх навантажень. Зазначимо, що після такої операції необхідно виконати перенумерацію невідомих (у даному випадку номери переміщень залишені старими).

Рівняння для визначення невідомих переміщень з урахуванням значень коефіцієнтів матриць жорсткості елементів (усі елементи прийняті однаковими) матиме вигляд

$$\mathbf{K}\,\mathbf{q}=\mathbf{F}, \tag{11.14}$$

де

$$\mathbf{K}=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{F}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix},\quad \mathbf{q}=\begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}. \tag{11.15}$$

Розв'язок рівняння (11.14) символічно має вигляд ($\mathbf{K}^{-1}$ – обернена матриця)

$$\mathbf{q}=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}. \tag{11.16}$$

Розв'язок рівняння (11.16) буде точним, оскільки степінь апроксимуючих поліномів відповідає дійсному

$$q_4=\frac{Fl}{EA},\quad q_3=\frac{2}{3}q_4,\quad q_2=\frac{1}{3}q_4. \tag{11.17}$$

Сили у вузлах можна знайти, помноживши матрицю (11.13) на повний вектор знайдених переміщень $q=[0,q_2,q_3,q_4]^T$.

$$\mathbf{R}=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix}. \tag{11.18}$$

Таким чином, ми одержали розв'язок задачі розтягу стержня силою за допомогою методу скінченних елементів. Цей варіант МСЕ називають методом скінченних елементів у переміщеннях, у зв’язку з тим, що невідомими тут є переміщення. Далі буде розглядатися саме цей варіант МСЕ, як найбільш поширений у практиці розрахунків. Саме у можливості побудови повної матриці жорсткості конструкції з матриць жорсткості елементів, одержаних незалежно від конструкції в цілому, і полягає основна особливість методу скінченних елементів. Згідно з МСЕ, спочатку розглядають кожний елемент, і будують його матрицю жорсткості, після чого елементи об'єднують з урахуванням умов нерозривності і граничних умов. У більшості випадків використовують елементи однакової форми, що дозволяє будувати матрицю жорсткості елемента тільки один раз. Як видно, цей метод розрахований виключно на використання ЕОМ. Зазначимо, що МСЕ використовується майже в усіх програмних засобах, призначених для розрахунків у механіці твердого деформівного тіла. Далі розглянемо декілька прикладів застосування МСЕ для розрахунку стержневих і пластинчатих конструкцій. Спочатку побудуємо матриці жорсткості для деяких стержневих елементів.

11.2 Стержневі скінченні елементи

Скінченний елемент при плоскому згині

Елемент завантажений вузловими силами $\mathbf{R} = \{R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4\}^T$.

Вектор переміщень – $\mathbf{q} = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4\}^T$. Додатні напрямки компонентів векторів **R** і **q** позначені на рисунку 13.7.

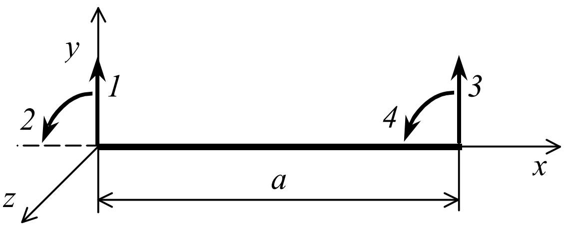


Рисунок 13.7 – Елемент стержня при плоскому згині

Потенціальна енергія деформації стержня при згині

$$U = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon\sigma dV, \tag{13.22}$$

де $\varepsilon = -y\dfrac{d^2 v}{dx^2}$, $\sigma = E\varepsilon$ (v – прогин балки).

Знайдемо розв'язок для прогину у вигляді

$$v = \mathbf{N}\mathbf{q}, \tag{13.23}$$

де N – матриця інтерполяційних функцій. У даному випадку доцільно прийняти за невідомі параметри не тільки значення функцій, але й їх похідних у вузлах. Для визначення інтерполяційних функцій запишемо апроксимаційний поліном

$$v = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \tag{13.24}$$

Порядок полінома забезпечує неперервність похідних другого порядку, які входять в підінтегральні функції (13.22). Поліном має чотири коефіцієнти, для визначення яких використаємо умови щодо переміщень і їх перших похідних (кутів повороту) у крайніх (вузлових) перерізах

$$v(0) = q_1, \quad \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0} = q_2, \quad v(a) = q_3, \quad \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=a} = q_4. \tag{13.25}$$

Функція переміщень матиме вигляд

$$v = N_1 q_1 + N_2 q_2 + N_3 q_3 + N_4 q_4, \tag{13.26}$$

де

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}, \quad N_2 = x - 2\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}, \\ N_3 &= 3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}, \quad N_4 = -\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}. \end{aligned} \tag{13.27}$$

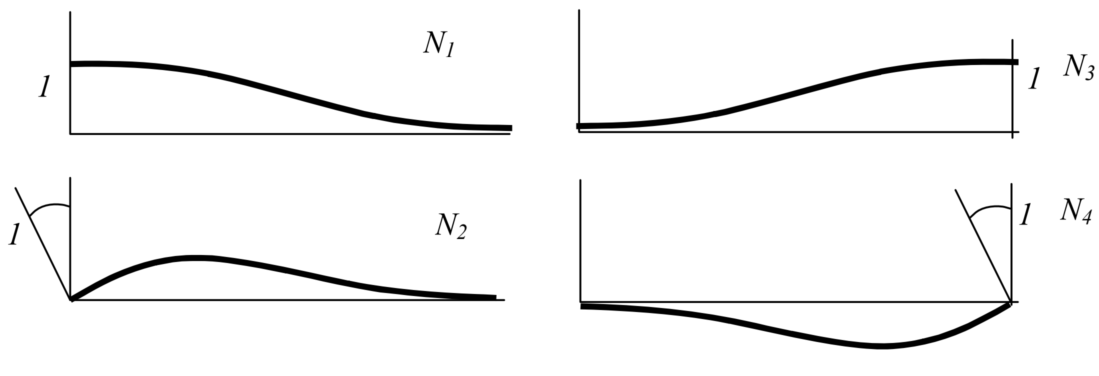


Рисунок 13.8 – Функції Ерміта

Це так звані функції Ерміта, які задовольняють умови

$$\begin{array}{llll} N_1(0)=1 & N_1'(0)=0 & N_1(a)=0 & N_1'(a)=0 \\ N_2(0)=0 & N_2'(0)=1 & N_2(a)=0 & N_2'(a)=0 \\ N_3(0)=0 & N_3'(0)=0 & N_3(a)=1 & N_3'(a)=0 \\ N_4(0)=0 & N_4'(0)=0 & N_4(a)=0 & N_4'(a)=1. \end{array}$$

Графіки цих функцій зображені на рисунку 13.8.

Після підстановки переміщення v (13.26) у формулу (13.22) одержимо

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\,\mathbf{q}, \tag{13.28}$$

де

$$\mathbf{K}=\frac{2EI}{a}\begin{bmatrix} \frac{6}{a^2} & \frac{3}{a} & -\frac{6}{a^2} & \frac{3}{a} \\ & 2 & -\frac{3}{a} & 1 \\ & & \frac{6}{a^2} & -\frac{3}{a} \\ сим. & & & 2 \end{bmatrix}. \qquad (13.29)$$

Для знаходження вектора вузлових навантажень скористаємось формулою для роботи зовнішніх сил

$$W=\int_0^a v\,p dx\,, \qquad (13.30)$$

звідки для $p = p_0 = const$

$$\mathbf{F}=\frac{p_0 a}{2}\begin{Bmatrix}1 & \frac{a}{6} & 1 & -\frac{a}{6}\end{Bmatrix}^T, \qquad (13.31)$$

для $p = p_0\dfrac{x}{a}$

$$\mathbf{F}=\frac{p_0 a}{2}\begin{Bmatrix}3 & \frac{2a}{3} & 7 & -a\end{Bmatrix}^T. \qquad (13.32)$$

Елемент стержня, який працює на згин з розтягом-стиском

На елемент стержня довжиною a і жорсткістю на згин EI_z і на розтяг EA діє поперечне $p_y(x)$ і подовжнє $p_x(x)$ навантаження (рисунок 13.9). Осі y і z – головні осі поперечного перерізу стержня. Елемент має 6 ступенів вільності. Потенціальна енергія деформації

$$U=\frac{1}{2}\int_V \varepsilon\sigma dV\,, \qquad (13.33)$$

де $\quad \varepsilon=\dfrac{du}{dx}-y\dfrac{d^2v}{dx^2}, \quad \sigma = E\varepsilon \qquad (13.34)$

(u – переміщення вздовж осі x, v – переміщення в напрямку осі y).

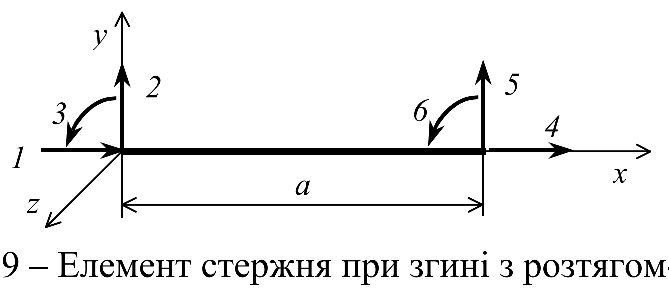


Рисунок 13.9 – Елемент стержня при згині з розтягом-стиском

Апроксимації осьового переміщення і прогину

$$u = N_1 q_1 + N_2 q_4 = \mathbf{N_p}\,\mathbf{q_p}\,, \tag{13.35}$$

$$v = N_3 q_2 + N_4 q_3 + N_5 q_5 + N_6 q_6 = \mathbf{N_з}\,\mathbf{q_з}\,, \tag{13.36}$$

$N_1 = 1 - \dfrac{x}{a},\ N_2 = \dfrac{x}{a},\ N_3, \ldots N_6$ – функції Ерміта .

Підставляємо u, v у (13.34), (13.33) і з урахуванням вибору осей y, z, знаходимо

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{q_p}^{\mathbf{T}}\left(EA\int_0^a \left(\frac{d}{dx}\mathbf{N_p}\right)^{\mathbf{T}}\left(\frac{d}{dx}\mathbf{N_p}\right)dx\right)\mathbf{q_p} +$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{q_з}^{\mathbf{T}}\left(EI_z\int_0^a \left(\frac{d^{\mathbf{2}}}{dx^{\mathbf{2}}}\mathbf{N_з}\right)^{\mathbf{T}}\left(\frac{d^{\mathbf{2}}}{dx^{\mathbf{2}}}\mathbf{N_з}\right)dx\right)\mathbf{q_з}\,,$$

або

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}\,\mathbf{q}\,,$$

де

$$\mathbf{q} = \{q_p \quad q_з\}^T\,,$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{a} & 0 & 0 & -\frac{EA}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} & 0 & -\frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} \\ 0 & \frac{6EI}{a^2} & \frac{4EI}{a} & 0 & -\frac{6EI}{a^2} & \frac{2EI}{a} \\ -\frac{EA}{a} & 0 & 0 & \frac{EA}{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{a^3} & -\frac{6EI}{a^2} & 0 & \frac{12EI}{a^3} & -\frac{6EI}{a^2} \\ 0 & \frac{6EI}{a^2} & \frac{2EI}{a} & 0 & -\frac{6EI}{a^2} & \frac{4EI}{a} \end{bmatrix} \tag{13.37}$$

Вектор вузлових навантажень одержимо за аналогією з попередніми. Для сталих $p_x = const$, $p_y = const$

$$\mathbf{F} = \left\{ \frac{p_x a}{2} \quad \frac{p_y a}{2} \quad -\frac{p_y a^2}{12} \quad \frac{p_x a}{2} \quad \frac{p_y a}{2} \quad \frac{p_x a^2}{12} \right\}^T. \tag{13.38}$$

Матриці жорсткості елементів у глобальних координатах

У розрахунку стержневих конструкцій необхідно будувати матриці жорсткості елементів з довільної орієнтацією по відношенню до глобальної системи координат. Глобальною будемо називати систему, загальну для усієї конструкції. На відміну від глобальної, локальні системи координат будуть пов'язані з кожним елементом. Одержані вище матриці жорсткості стержневих елементів записані у локальних координатах.

Розглянемо елемент стержня, який працює на розтяг-стиск, у глобальних координатах $\bar{x}, \bar{y}$ (рисунок 13.10).

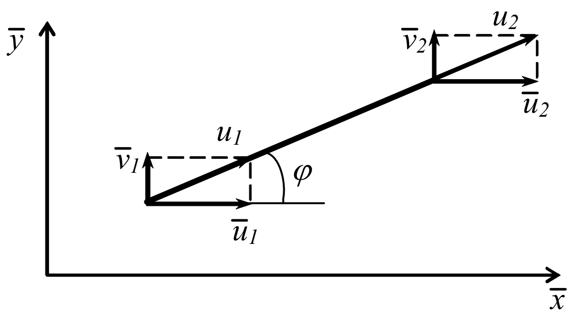


Рисунок 13.10 – Елемент стержня у глобальних координатах

Вектор вузлових переміщень у локальних координатах –

$$\mathbf{q} = \{u_1 \quad u_2\}^T, \tag{13.39}$$

у глобальних –

$$\overline{\mathbf{q}} = \{\bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{v}_2\}^T. \tag{13.40}$$

Очевидно, зв'язок між компонентами переміщень $\mathbf{q}$ і $\overline{\mathbf{q}}$ є таким:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{x\bar{x}} & 0 \\ t_{x\bar{y}} & 0 \\ 0 & t_{x\bar{x}} \\ 0 & t_{x\bar{y}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{x\bar{x}} & t_{x\bar{y}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{x\bar{x}} & t_{x\bar{y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix},$$

або

$$\overline{\mathbf{q}} = \mathbf{T}^{\mathbf{T}}\mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{q}}, \tag{13.41}$$

де

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{x\bar{x}} & t_{x\bar{y}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{x\bar{x}} & t_{x\bar{y}} \end{bmatrix}, \tag{13.42}$$

$$t_{x\bar{x}} = \cos(x\bar{x}), \quad t_{x\bar{y}} = \cos(x\bar{y}).$$

Вузлові сили пов'язані аналогічними співвідношеннями

$$\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{T}^{\mathbf{T}}\mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{F}}. \tag{13.43}$$

Запишемо залежності між вузловими силами і переміщеннями у двох системах координат

$$\mathbf{K}\,\mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad \overline{\mathbf{K}}\,\overline{\mathbf{q}} = \overline{\mathbf{F}}. \tag{13.44}$$

З урахуванням (5.45), (5.47) матрицю жорсткості можна записати так:

$$\overline{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}\,\mathbf{T}. \tag{13.45}$$

Розглянемо елемент стержня з шістьма ступенями вільності при деформуванні його у площині $\overline{x}O\overline{y}$ (рисунок (13.11).

Вектор вузлових переміщень у локальних координатах

$$\mathbf{q} = \{u_1 \quad v_1 \quad \vartheta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \vartheta_2\}^T. \tag{13.46}$$

Вектор вузлових переміщень у глобальних координатах

$$\overline{\mathbf{q}} = \{\overline{u}_1 \quad \overline{v}_1 \quad \overline{\vartheta}_1 \quad \overline{u}_2 \quad \overline{v}_2 \quad \overline{\vartheta}_2\}^T. \tag{13.47}$$

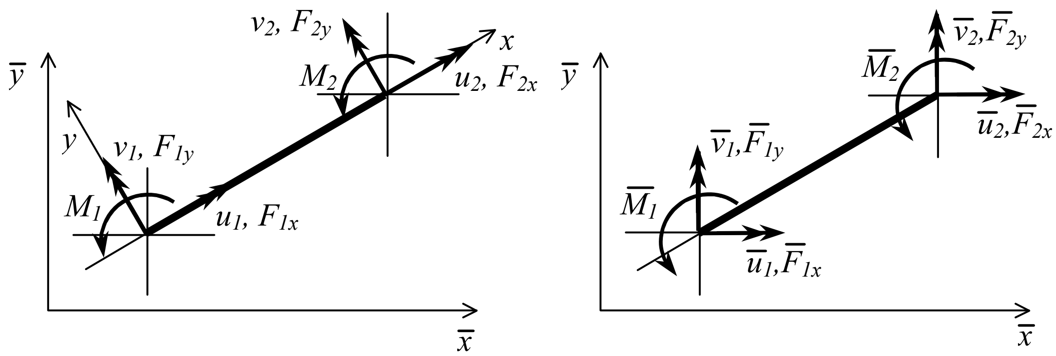


Рисунок 13.11 – Вузлові переміщення

Встановимо зв'язок між цими векторами.

Складові переміщень пов'язані залежностями (рисунок 13.12)

$$\overline{u} = u\cos(x\overline{x}) + v\cos(y\overline{x}), \quad \overline{v} = u\cos(x\overline{y}) + v\cos(y\overline{y}). \tag{13.48}$$

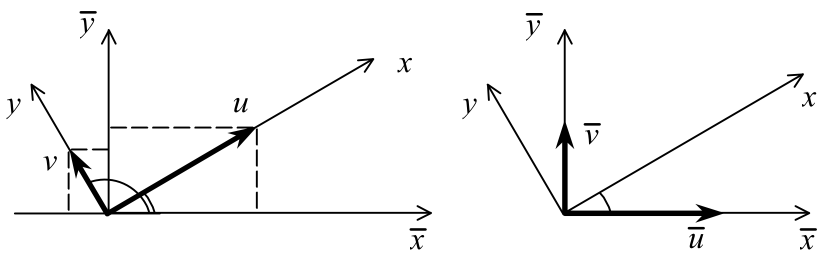


Рисунок 13.12

З урахуванням введених вище позначень одержимо

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{x\bar{x}} & t_{y\bar{x}} & 0 \\ t_{x\bar{y}} & t_{y\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \vartheta \end{Bmatrix}. \tag{13.49}$$

Для вузлових переміщень

$$\overline{\mathbf{q}} = \mathbf{T}\mathbf{q}. \tag{13.50}$$

Матрицю, яка пов'язує вектори $\mathbf{q}$ і $\overline{\mathbf{q}}$, можна записати у вигляді

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{x\bar{x}} & t_{y\bar{x}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{x\bar{y}} & t_{y\bar{y}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{x\bar{x}} & t_{y\bar{x}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{x\bar{y}} & t_{y\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{13.51}$$

Якщо врахувати, що вузлові сили пов'язані такою ж залежністю, як і переміщення

$$\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{T}\mathbf{F}, \tag{13.52}$$

для матриці жорсткості у глобальній системі матимемо такий вираз:

$$\overline{\mathbf{K}} = \mathbf{T}\mathbf{K}\mathbf{T}^{\mathrm{T}}. \tag{13.53}$$

Цю залежність можна одержати, записуючи вираз для потенціальної енергії як квадратичної форми (13.53). Оскільки значення енергії не залежить від системи координат, маємо рівність

$$\frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{K}}\,\overline{\mathbf{q}}. \tag{13.54}$$

Зробивши заміну $\overline{\mathbf{q}} = \mathbf{T}\mathbf{q}$, одержимо

$$\frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{K}}\mathbf{T}\mathbf{q}.$$

Очевидно,

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{K}}\mathbf{T}. \tag{13.55}$$

Якщо врахувати, що обернену залежність між $\overline{\mathbf{q}}$ і $\mathbf{q}$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{q}},$$

то залежність між матрицями $\overline{\mathbf{K}}$ і $\mathbf{K}$ буде такою

$$\overline{\mathbf{K}} = \mathbf{T}\mathbf{K}\mathbf{T}^{\mathrm{T}}. \tag{13.56}$$

Синтез скінченно-елементних моделей стержневих конструкцій

Після того, як конструкцію розділено на окремі скінченні елементи, і для кожного з них знайдені матриці жорсткості та вектори вузлових навантажень, тобто одержані залежності

$$\mathbf{K}^{(e)}\mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)}, \tag{13.57}$$

усі елементи необхідно пов'язати в єдину конструкцію. Оскільки кожен вузол перебуває у рівновазі під дією сил, що сходяться у цьому вузлі (враховуючи й зовнішнє навантаження), то необхідні рівняння зв'язку можна було б одержати, записавши умови рівноваги кожного вузла. Очевидно, до цих рівнянь, як невідомі, входитимуть переміщення вузлів.

На практиці застосування рівнянь рівноваги вузлів для знаходження залежностей між переміщеннями і зовнішніми навантаженнями (внутрішні сили за допомогою матриць жорсткості кожного елемента виключаються з рівнянь) приводить до громіздких перетворень і ускладнює процес програмування. Раціональнішою є методика, заснована на прирівнюванні у кожному вузлі переміщень елементів, які в цьому вузлі з'єднуються. Для цього в кожному вузлі позначають і нумерують ненульові переміщення у додатних напрямах глобальних осей координат. Після цього записують умови рівності глобальних переміщень, що пронумеровані, і локальних для кожного елемента.

Розглянемо побудову глобальної матриці жорсткості на прикладі скінченно-елементної моделі стержня (рисунок 5.15).

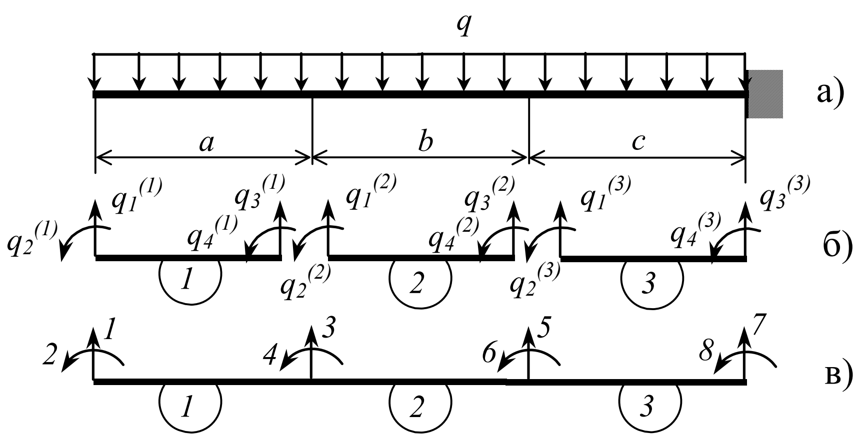


Рисунок 13.13 – Скінченно-елементна модель стержня

Нумерацію для окремих елементів (локальну) показано на рисунку 13.13, б, а глобальну – на рисунку 13.13, в. Порівнюючи локальні і глобальні номери, одержимо

$$\begin{aligned} &q_1^{(1)} = q_1, \quad q_2^{(1)} = q_2, \quad q_3^{(1)} = q_3, \quad q_4^{(1)} = q_4, \\ &q_1^{(2)} = q_3, \quad q_2^{(2)} = q_4, \quad q_3^{(2)} = q_5, \quad q_4^{(2)} = q_5, \\ &q_1^{(3)} = q_5, \quad q_2^{(3)} = q_6, \quad q_3^{(3)} = 0, \quad q_4^{(3)} = 0. \end{aligned} \tag{13.58}$$

Ці залежності можна записати для кожного елемента у вигляді матриці індексів.

Таблиця 13.2 – Матриця індексів

№ елементів	Локальні переміщення елемента			
	1	2	3	4
	Глобальні переміщення			
1	1	2	3	4
2	3	4	5	6
3	5	6	0	0

Згідно з цією таблицею індекси визначаються через локальні індекси даного елемента такими залежностями:

$$IG = mi(IL,\, NE), \quad JG = mi(JL,\, NE), \tag{13.59}$$

де IG – глобальний номер рядка матриці mi;

JG – глобальний номер стовпця матриці;

IL – локальний номер рядка матриці жорсткості елемента;

JL – локальний номер стовпця матриці жорсткості елемента

NE – номер елемента.

Компоненти матриць з однаковими глобальними індексами додаються. У даному випадку маємо

$$\begin{gathered}
K_{11} = K_{11}^{(1)}, \quad K_{12} = K_{12}^{(1)}, \quad K_{22} = K_{22}^{(1)}, \quad K_{21} = K_{21}^{(1)}, \\
K_{13} = K_{13}^{(1)}, \quad K_{14} = K_{14}^{(1)}, \quad K_{23} = K_{23}^{(1)}, \quad K_{24} = K_{24}^{(1)}, \\
K_{33} = K_{33}^{(1)} + K_{11}^{(2)}, \quad K_{34} = K_{34}^{(1)} + K_{12}^{(2)}, \quad K_{44} = K_{44}^{(1)} + K_{22}^{(2)}, \\
K_{43} = K_{34}, \quad K_{35} = K_{13}^{(2)}, \quad K_{36} = K_{14}^{(2)}, \quad K_{45} = K_{23}^{(2)}, \\
K_{46} = K_{24}^{(2)}, \quad K_{56} = K_{34}^{(2)} + K_{12}^{(3)} \quad K_{65} = K_{56}, \quad K_{66} = K_{44}^{(2)} + K_{22}^{(3)}, \\
F_1 = F_1^{(1)}, \quad F_2 = K_2^{(1)}, \quad F_3 = F_3^{(1)} + F_1^{(2)} \quad F_4 = F_4^{(1)} + F_2^{(2)}, \\
F_5 = F_3^{(2)} + F_1^{(3)} \quad F_6 = F_4^{(2)} + F_2^{(3)}.
\end{gathered} \tag{13.60}$$

Операція перейменування індексів і синтезу глобальної матриці жорсткості дуже легко програмується. У системі MathCAD це можна зробити одним рядком

$$\mathbf{K}_{\mathbf{mi}_{i,j},\mathbf{mi}_{i,k}} := \mathbf{K}_{\mathbf{mi}_{i,j},\mathbf{mi}_{i,k}} + \mathbf{Ke}(i)_{j,k}\,, \tag{13.61}$$

де **mi** – матриця індексів

$$\mathbf{mi} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix},$$

i – кількість елементів;

j, k – кількість локальних переміщень в одному елементі;

$\mathbf{Ke}(i)$ – матриця жорсткості i-того елемента.

Для вектора сил

$$\mathbf{F}_{\mathbf{mi}_{i,j}} = \mathbf{F}_{\mathbf{mi}_{i,j}} + \mathbf{Fe}(i)_j. \tag{13.62}$$

Система алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих переміщень буде такою

$$\underset{8\times8}{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{q} = \underset{8\times1}{\mathbf{F}}. \tag{13.63}$$

Матриці $\mathbf{K}, \mathbf{F}, \mathbf{q}$ у (13.53) вміщують компоненти, пов'язані з нульовими переміщеннями q_7 і q_8. Для того, щоб врахувати граничні умови $q_7 = 0$ і $q_8 = 0$, достатньо викреслити в цих матрицях відповідні стовпці й рядки, після чого матимемо

$$\underset{6\times6}{\mathbf{K}} \mathbf{q} = \underset{6\times1}{\mathbf{F}}. \tag{13.64}$$

Розв'язок цього рівняння дасть переміщення вузлів балки

$$\mathbf{q} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}. \tag{13.65}$$

Алгоритм методу скінченних елементів

Узагальнюючи розглянуту методику, можна сформулювати таку послідовність використання МСЕ (алгоритм):

1) дискретизація конструкції, тобто подання її як сукупності вибраних скінченних елементів;

2) побудова матриць жорсткості елементів;

3) побудова загальної матриці жорсткості та вектора навантажень для усієї області (об’єму);

4) накладення граничних умов і редукція (тобто відповідне зменшення розмірів) матриць жорсткості, векторів невідомих і навантаження;

5) розв'язок системи рівнянь відносно незалежних вузлових переміщень;

6) визначення інших необхідних величин, які залежать від знайдених вузлових переміщень.

Розглянемо ці етапи спочатку в загальних рисах. Конкретні реалізації подані в наступних лекціях.

Дискретизація конструкції

Розділення конструкції на окремі скінченні елементи є дуже відповідальним етапом розрахунку. Від правильного розділення залежить як точність розрахунку, так і його трудомісткість. Оскільки ця операція не має теоретичного обґрунтування, ефективність її повністю залежить від інженерних навичок того, хто нею займається. Використання малих елементів хоча й підвищує точність розрахунку, але збільшує кількість невідомих і порядок рівнянь для їх визначення. У зв'язку з цим, необхідно вибирати розміри елементів у відповідності з градієнтами тих величин, які визначаються. У місцях, де розшукувана величина змінюється швидко, розміри елементів зменшують.

У методі скінченних елементів використовуються елементи різних форм і розмірів. Вибір елемента залежить від характеру задачі, від точності розв'язку, яку треба забезпечити.

При заміні конструкції сукупністю дискретних елементів важливо забезпечити якомога більшу відповідність між моделлю і конструкцією.

Найпростішими є одновимірні (стержневі) елементи (рисунок 4.6). Площа поперечного перерізу елемента може бути сталою по довжині. Найчастіше такий елемент зустрічається у розрахунках стержневих конструкцій. Елемент може мати два і більше вузлів.

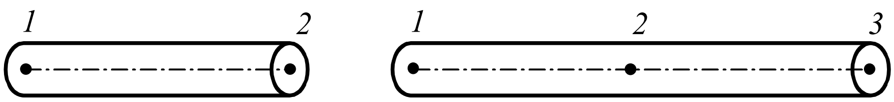


Рисунок 4.6– Одновимірні скінченні елементи

Для побудови дискретної моделі двохвимірної області використовуються двовимірні скінченні елементи (рисунок 4.7). Найчастіше використовуються трикутники і чотирикутники з різною кількістю вузлів.

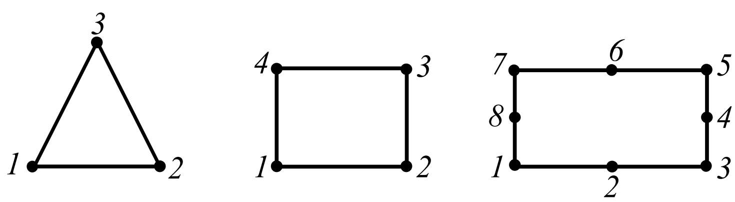


Рисунок 4.7 – Двовимірні скінченні елементи

Тривимірні тіла моделюють такими елементами, як тетраедр і паралелепіпед (рисунок 4.8).

Для дискретизації осесиметричних тіл широко використовують осесиметричні скінченні елементи, створені обертанням плоскої фігури відносно осі.

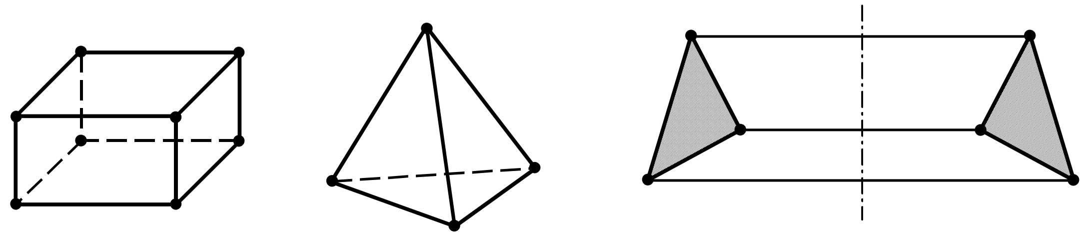


Рисунок 4.8 – Об’ємні скінченні елементи

Процес дискретизації може бути розділений на два етапи: розділення тіла на елементи і нумерація елементів і вузлів. Найбільш простим є розділення стержневих конструкцій на одновимірні елементи. Наприклад, конструкцію ферми (рисунок 6.9) можна розділити на скінченні елементи – стержні ферми з вузлами у вузлах ферми.

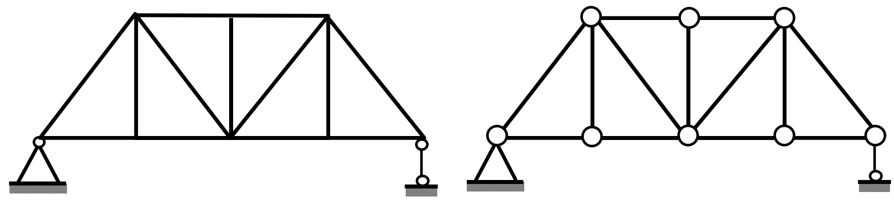


Рисунок 4.9 – Скінченно-елементна модель ферми

Для двовимірних конструкцій найбільш раціональним є розділення на трикутні й прямокутні елементи.

Загальні рекомендації щодо етапу дискретизації зводяться до таких [Постнов]:

1) розміри елементів повинні забезпечувати необхідну точність описання переміщень і напружень, для чого вони повинні змінюватись у відповідності з величиною градієнтів переміщень і напружень;

2) тип елементів, що використовується, повинен забезпечити адекватність роботи конструкції та її скінченно-елементної моделі, а також достатню точність апроксимації форми й умов закріплення конструкції;

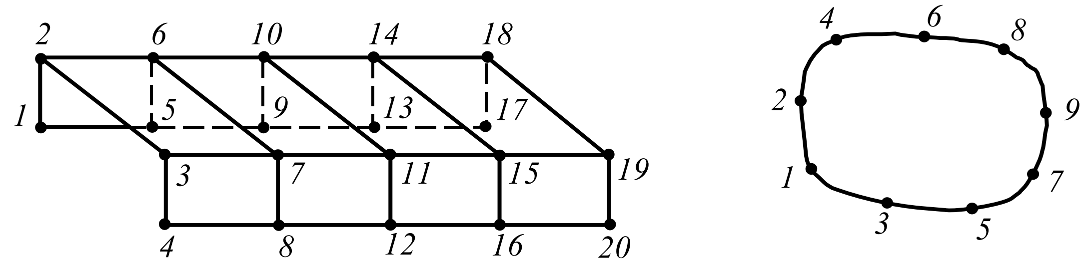


Рисунок 4.10 – Послідовність нумерації вузлів

3) нумерація повинна забезпечувати мінімальну частину стрічки глобальної матриці жорсткості. Чим менше ширина стрічки, тим зручніше для розв'язку одержана система рівнянь МСЕ. Для цього нумерація повинна

проводитись уздовж поперечного перерізу конструкції (рисунок 6.10а). Для замкнутих контурів нумерація проводиться симетрично відносно початкового вузла (рисунок 4.10, б).

В усіх випадках необхідно намагатись зменшити різницю між номерами сусідніх вузлів.

В існуючих програмних комплексах, які використовують МСЕ, операція розділення на елементи, як правило, автоматизована. Для цього використовуються різні методи побудови сітки на поверхні або в об'ємі конструкції. Огляд цих методів можна знайти у [15].

Побудова матриць жорсткості елементів

У більшості випадків при розрахунках конкретних конструкцій користуються готовими матрицями жорсткості, які наводяться у довідниках [31, 36] або у бібліотеках відповідних програмних комплексів. Однак, іноді необхідно самостійно обчислювати матриці жорсткості, зокрема у випадках, коли компоненти матриць визначаються чисельним способом.

Для побудови матриць жорсткості елементів використовують варіаційне рівняння Лагранжа або рівняння методу зважених нев'язок, записаних для одного елемента. Основним етапом тут є вибір апроксимуючих функцій, що описують дійсне поле переміщень у елементі. Ці функції повинні, як і координатні функції у методі Рітца, задовольняти умовам допустимості і повноти для даної задачі. Допустимість передбачає неперервність функцій та їх похідних до $p-1$ порядку (p – порядок найвищої похідної у варіаційному рівнянні) і коректність визначення параметрів в умовах варіаційного формулювання. Для виконання умов повноти апроксимуючі функції повинні задовольняти умові незмінності похідних, згідно з якою похідні у варіаційному рівнянні повинні ставати незмінними зі зменшенням розмірів елемента. Похідні p-го порядку можуть мати розриви першого роду, але при зменшенні розмірів елемента повинні залишатись сталими.

Якщо виконуються умови допустимості й повноти, розв'язок за методом скінченних елементів буде наближатись до точного при зменшенні розмірів елемента.

Синтез скінченно-елементної моделі конструкції

Синтезом називають процес складання елементів у зв’язану скінченно-елементну модель конструкції. Оскільки сили, що діють у вузлах, є коефіцієнтами матриці жорсткості елементів, а у вузлі сходиться декілька елементів, синтез зводиться до складання по кожному з напрямків вузлових переміщень відповідних коефіцієнтів матриць жорсткості декількох елементів і розміщення цієї суми у відповідній клітинці глобальної матриці жорсткості.

Формально операцію синтезу можна провести за допомогою розглянутої вище матриці індексів. Розглянемо цю процедуру докладніше.

Під набором індексів для кожного елемента розуміють значення локальних узагальнених переміщень, які ті приймають при глобальній нумерації переміщень для конструкції у цілому.

Глобальна нумерація визначається при дискретизації системи на скінченні елементи. Локальна нумерація пов'язана з вибором функцій апроксимації і є однаковою для однотипних елементів.

Для побудови матриці індексів спочатку складається топологічна матриця, яка встановлює відповідність між локальною нумерацією вузлів кожного елемента і глобальною (рисунок 4.11)

$$\mathbf{Top} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 9 & 10 & 11 & 7 & 8 & 2 \\ 3 & 7 & 11 & 12 & 13 & 8 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

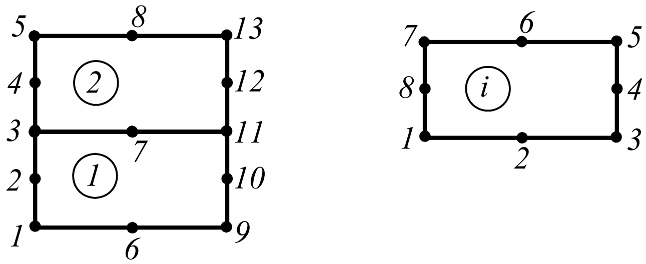


Рисунок 4.11 – Глобальна і локальна нумерації вузлів

Оскільки для збирання глобальної матриці необхідні номери узагальнених координат, а не вузлів, необхідно домовитись про відповідність нумерації вузлів і узагальнених переміщень. При невеликій кількості вузлів можна записати матрицю індексів, яка задає відповідність між номерами глобальних і локальних узагальнених координат елемента, безпосередньо (рисунок 4.12, таблиця 4.2).

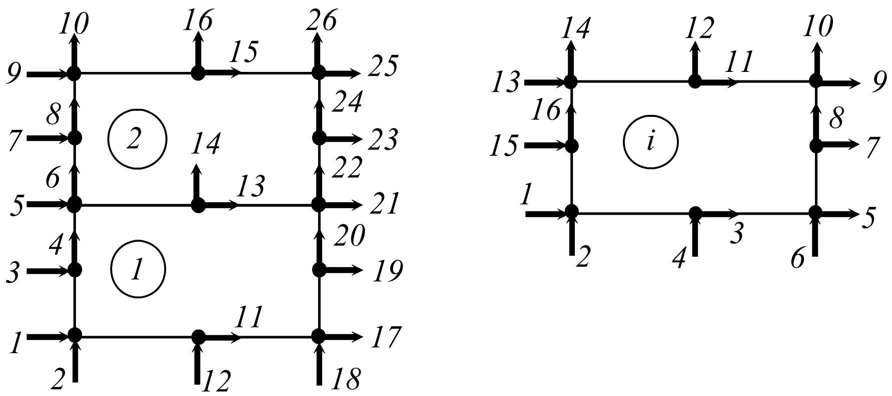


Рисунок 4.12 – Глобальна і локальна нумерації вузлових переміщень

Таблиця 4.2 – Матриця індексів до рисунка 4.12

№ елемента	Індекси вузлових переміщень															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	2	11	12	17	18	19	20	21	22	13	14	5	6	3	4
2	5	6	13	14	21	22	23	24	25	26	15	16	9	10	7	8

Після того, як повністю описана геометрія конструкції, необхідно задати граничні умови. Для МСЕ у формі методу переміщень, який розглядається у даному посібнику, найпростіше задати граничні умови відносно переміщень, і це вигідно відрізняє цей варіант МСЕ від інших. При формулюванні граничних умов у переміщеннях найчастіше зустрічаються випадки жорсткого закріплення у відповідних напрямках. Врахування нульового значення проводиться заміною нулем відповідного переміщення у матриці індексів і перенумерацією всіх залишених глобальних переміщень. Це рівнозначно викреслюванню з глобальної матриці жорсткості стовпця і рядка з номером координати, яка прирівнюється до нуля, що приводить до зменшення розміру глобальної матриці жорсткості. Оскільки цей спосіб приводить до незручностей, пов'язаних з необхідністю перенумерації переміщень, раціональнішим виявляється інший. На перетині головної діагоналі і рядка або стовпця з номером заданої координати ставиться одиниця, а у векторі навантажень системи рівнянь у відповідному рядку записується нуль або задане ненульове переміщення, інші коефіцієнти у відповідних рядку і стовпці прирівнюються до нуля.

Недолік цього варіанту полягає в тому, що одержана після такої операції матриця жорсткості стає несиметричною. Симетрію можна зберегти, використавши спосіб Пейна-Айронса [25]: якщо задається умова $q_i = \overline{q}_i$, то діагональний елемент у *i*-му рядку матриці множиться на дуже велике число, а *i*-й елемент у векторі навантажень замінюється добутком того ж самого числа, значень $\overline{q}_i$ і діагонального елемента.

Розв'язок систем рівнянь МСЕ

Оскільки розв'язок системи рівнянь МСЕ займає основну частину часу розрахунку задачі, вибір методу розв'язання є дуже важливим кроком. Проблемі розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь присвячена величезна кількість робіт, існує багато готових програм. При виборі методу необхідно враховувати особливості МСЕ. Матриці жорсткості у МСЕ є рідко заповненими, що дозволяє при раціональній нумерації привести всі ненульові коефіцієнти ближче до головної діагоналі (стрічкова структура матриці). Існують програми, які враховують стрічкову структуру і суттєво зменшують час розв'язання системи рівнянь з такою матрицею [5].

Способи розв'язку систем лінійних рівнянь поділяються на прямі та ітераційні. Найбільш поширені прямі методи, серед яких найчастіше використовуються варіанти методу Гауса. Характерним представником ітераційних методів є метод Гауса-Зайделя (метод послідовної релаксації) [37, 38].

Розв'язок задач динаміки залежить від виду правої частини диференціального рівняння коливань. При нульовій частині розв’язок зводиться до визначення власних частот і форм коливань і називається задачею на власні значення матриці динамічної жорсткості. При ненульовій правій частині приходимо до задач вимушених коливань. Докладно методи розв'язання задач статики і динаміки розглядаються у наступних лекціях (див. також [11, 35]).

Обробка результатів

У МСЕ у варіанті методу переміщень безпосередньо одержують переміщення вузлів. Маючи переміщення, можна одержати всі інші параметри розв'язку, зокрема сили у вузлах, напруження в точках об'єму.

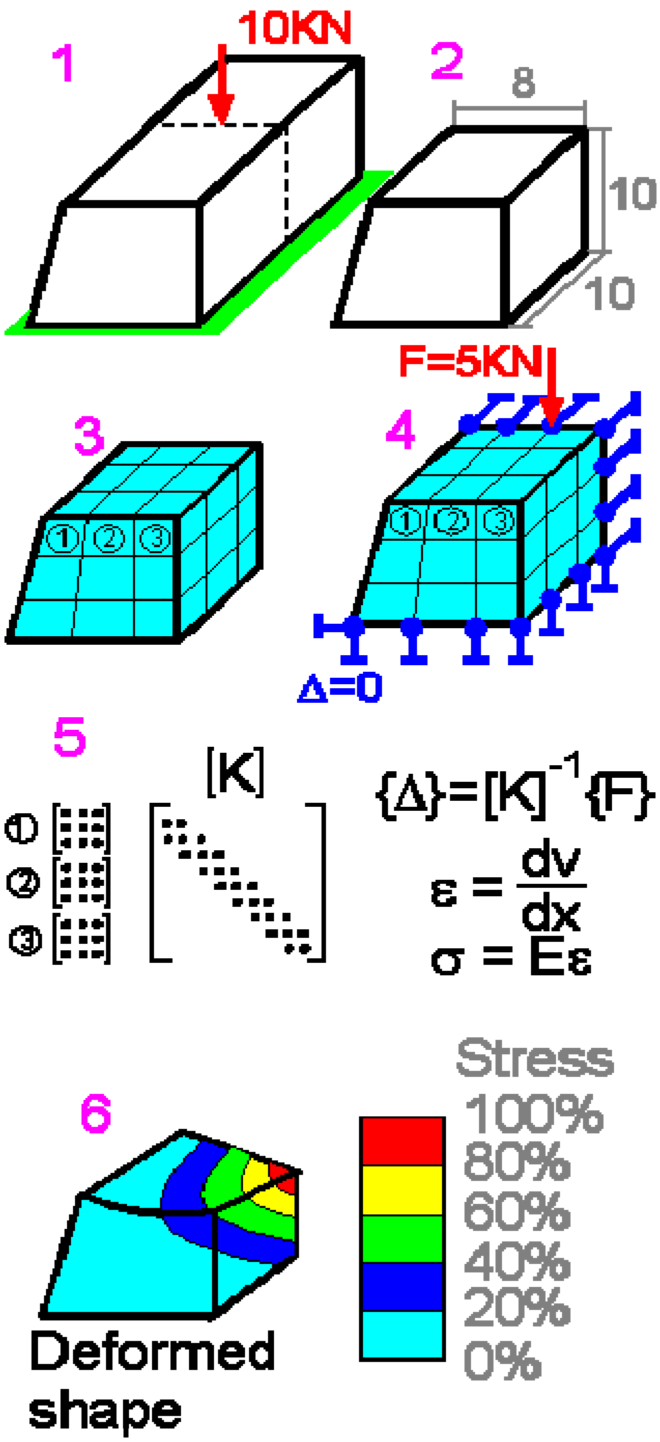
Для визначення вузлових сил необхідно розв'язати рівняння рівноваги типу (4.5), записане для кожного скінченного елемента, відносно правої частини.

При визначенні напружень використовують формули зв'язку між напруженнями, деформаціями і переміщеннями.

Зазначимо, що оскільки деформації й напруження визначають за відомими переміщеннями з використанням операції диференціювання (згадайте формули Коші), точність їх визначення порівняно з переміщеннями погіршується. Рекомендується визначати напруження у вузлових точках як середнє від значень для кожного елемента.

Розглянута послідовність реалізації алгоритму методу скінченних елементів демонструється на рисунку 4.13 на прикладі розрахунку об’єму, завантаженого силою у площині симетрії (1). Симетричність об’єму дозволяє розглянути одну його половину (2). Дискретну модель об’єму після побудови сітки скінченних елементів показано на рисунку (3). Після побудови скінченно-елементної моделі встановлюються закріплення (4). У площині симетрії необхідно забезпечити умови з’єднання з другою симетричною половиною. На наступному етапі (5) будуються (або вибираються з довідника) матриці жорсткості елементів, формується глобальна матриця для об’єму і знаходиться розв’язок одержаної системи алгебраїчних рівнянь відносно переміщень. Для одержання інших параметрів, зокрема напружень, використовуються відповідні залежності, у даному випадку – закон Гука. Останній етап – вивід результатів

(6) реалізується, як правило, за допомогою відповідного графічного редактора, а також у вигляді табличних даних. Необхідно наголосити, що наведений варіант методу скінченних елементів не єдиний, хоча і найбільш поширений. Існують варіанти МСЕ, де невідомими є сили у вузлах, або частково сили і переміщення. Однак більшість програмних комплексів, які реалізують МСЕ, використовують саме варіант МСЕ у переміщеннях.



11.2 Основні залежності плоскої задачі напруженого стану

У тонкостінних елементах конструкцій, зокрема пластин, при дії сил, прикладених по контуру, має місце плоский напружений стан. Уявимо собі плоску пластину, завантажену силами у її площині (рисунок 13.14, а). Товщину пластин h вважаємо малою порівняно з габаритними розмірами a і b.

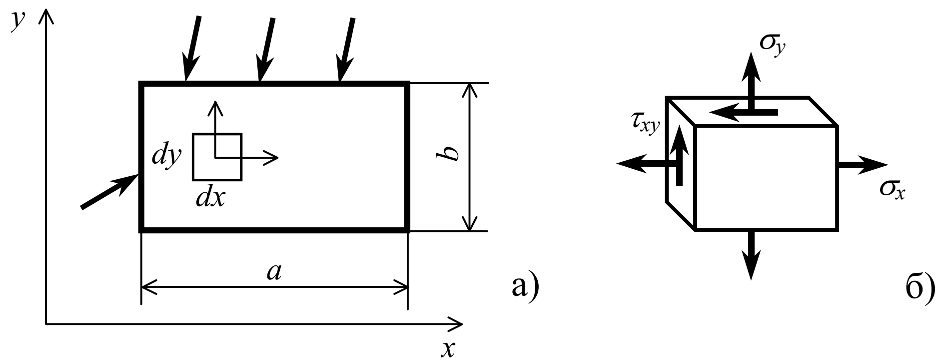


Рисунок 13.14 – Плоский напружений стан

Якщо виділити у пластині елемент з розмірами dx, dy, h, то на його гранях у загальному випадку будуть діяти напруження σ_x, σ_y і τ_{xy} (рисунок 13.14, б). Напруження $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{zy}$ будуть нульовими на поверхнях елемента. Припустимо, що ці напруження будуть нульовими і у внутрішніх точках елемента. Такий напружений стан називають плоским. Напруження $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ рівномірно розподілені по товщині пластини h, якщо h – мала величина. Схему плоского напруженого стану приймають і у випадках не малої товщини h, і якщо навантаження нерівномірно розподілене по товщині, однак симетричне відносно серединної площини. При цьому знайдені напруження вважають середніми по товщині (узагальнений плоский напружений стан).

Задача про визначення напруженого стану є двовимірною, оскільки напруження і переміщення u і v залежать від двох координат x і y.

Використовуючи узагальнений закон Гука, з урахуванням введених припущень, одержимо

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}, \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right). \end{aligned} \tag{13.66}$$

Наявність поперечної деформації $\varepsilon_z \neq 0$ приводить до появи переміщення у напрямку, перпендикулярному поверхні пластини. Однак, у зв'язку з малою товщиною пластини, це переміщення буде малим, і можна стверджувати, що точки пластини переміщуються в основному вздовж осей x і y.

Рівняння рівноваги і граничні умови на поверхні тіла матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{P}_{\mathrm{V}} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{P}_{\mathrm{S}}, \end{aligned} \tag{13.67}$$

де $\mathbf{A}$ – матричний диференціальний оператор для плоского напруженого стану;

$\mathbf{A}_{\mathrm{s}}$ – матриця направляючих косинусів нормалі до поверхні, де діє навантаження $\mathbf{P}_{\mathrm{S}}$;

$\mathbf{P}_{\mathrm{V}}$ – вектор масових сил;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{\mathrm{S}} = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{\mathrm{V}} = \begin{bmatrix} X_V \\ Y_V \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{\mathrm{S}} = \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \end{bmatrix}, \tag{13.68}$$

$$n_x = \cos(x, n), \quad n_y = \cos(y, n).$$

Геометричні рівняння (рівняння Коші) приймають вигляд

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\mathbf{u}, \tag{13.69}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T, \quad \mathbf{u} = \{u \quad v\}^T.$$

З шести рівнянь сумісності деформацій у даному випадку залишається тільки одне

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0.$$

Закон Гука, записаний відносно напружень, приймає вигляд

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{13.70}$$

де $\mathbf{C}$ – матриця пружних модулів

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \tag{13.71}$$

Необхідно відрізняти плоский напружений стан від плоскої деформації. Якщо для пластини, навантаженої у своїй площині, створюються такі умови, що деформація по товщині неможлива (це може бути у двох випадках: у тілі великої довжини, коли кожний умовно виділений шар не може деформуватись по товщині, або при закріпленні тонкого шару (рисунок 13.15, а, б)), має місце плоска деформація.

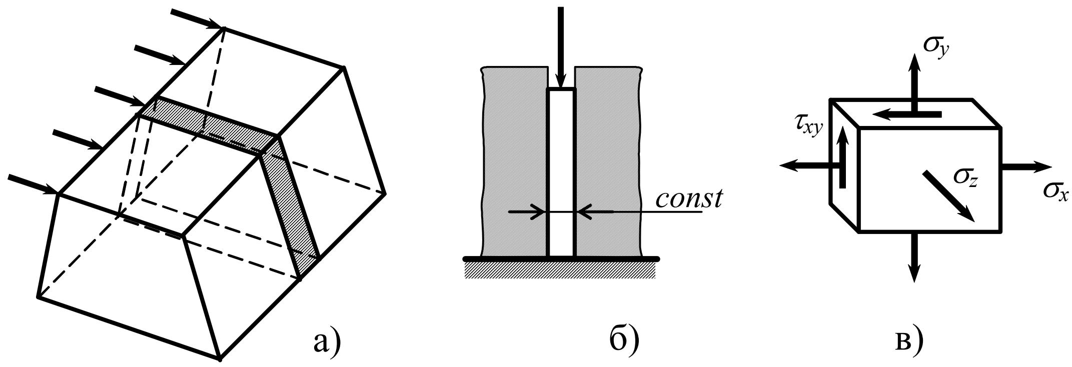


Рисунок 13.15 – Плоска деформація

Згідно із законом Гука, при $\varepsilon_z = 0$, $\sigma_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y)$.

Напружений стан, зображений на рисунку 13.15,в, є об'ємним, але він повністю визначається трьома напруженнями, що залежать від двох координат x і y, тому задача плоскої деформації залишається двовимірною. Для плоскої деформації усі рівняння плоского напруженого стану залишаються незмінними окрім рівнянь закону Гука. У зв''язку з наявністю напруження σ_z для плоскої деформації у матриці С (13.71) необхідно ввести нові умовні константи пружності $\nu_1 = \nu/(1-\nu)$, $E_1 = E/(1-\nu^2)$ і $G = E_1/[2(1+\nu_{1)}]$.

Скінченні елементи для моделювання плоскої задачі

Задача плоского напруженого стану, як видно з (13.67), (13.68), відноситься до класу задач, що описуються диференціальними рівняннями другого порядку ($2m = 2$). У зв'язку з цим для забезпечення збіжності МСЕ інтерполяційні поліноми повинні задовольняти умовам неперервності по всій області. Найвищий степінь полінома повинен бути не менший, ніж $2m-1=1$. Таким чином, переміщення в елементі (рисунок 13.16) апроксимуємо такими функціями:

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_3 x + \alpha_5 y, \; v(x, y) = \alpha_2 + \alpha_4 x + \alpha_6 y \,. \qquad (13.72)$$

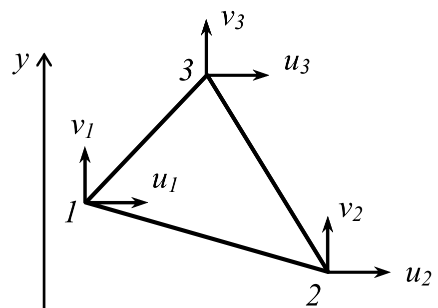


Рисунок 13.16 – Плоский трикутний елемент

Для визначення шести коефіцієнтів маємо шість умов для переміщень у вузлах

$$u(x_i, y_i) = u_i, \quad v(x_i, y_i) = v_i, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{13.73}$$

Як і раніше, переміщення записуємо у вигляді добутку функцій інтерполяції на невідомі коефіцієнти – переміщення вузлових точок

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}, \tag{13.74}$$

де

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3\}^T,$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}, \tag{13.75}$$

$$N_1 = y_{23}(x - x_3) - x_{23}(y - y_3)\frac{1}{2S},$$

$$N_2 = y_{31}(x - x_1) - x_{31}(y - y_1)\frac{1}{2S},$$

$$N_3 = y_{12}(x - x_2) - x_{12}(y - y_2)\frac{1}{2S},$$

$$2S = x_{23}y_{31} - x_{31}y_{23},$$

$$x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j, \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Компоненти вектора деформацій згідно із залежностями (13.69)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{q}, \tag{13.76}$$

де

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2S}\begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & -y_{21} & 0 \\ 0 & -x_{23} & 0 & -x_{31} & 0 & x_{21} \\ -x_{23} & y_{23} & -x_{31} & y_{31} & x_{21} & -y_{21} \end{bmatrix} - \tag{13.77}$$

матриця деформацій.

Використовуючи далі фізичні залежності (13.70), одержимо вираз для напружень

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{13.78}$$

де

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T, \quad \mathbf{C} = \frac{E}{1 - \nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

Після підстановки $\boldsymbol{\varepsilon}$ з (13.76) одержимо

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{q} = \mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{q}, \tag{13.79}$$

де

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{E}{2S(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} y_{23} & -\nu x_{23} & y_{31} & -\nu x_{31} & -y_{21} & \nu x_{31} \\ \nu y_{23} & -x_{23} & \nu y_{31} & -x_{31} & -\nu y_{21} & x_{21} \\ -a_1 x_{23} & a_1 y_{23} & -a_1 x_{31} & a_1 y_{31} & a_1 x_{21} & -a_1 y_{21} \end{bmatrix}, \qquad (13.80)$$

$$a_1 = \frac{G}{E}(1-\nu^2).$$

Матрицю жорсткості $\mathbf{K}$ одержимо з виразу для потенціальної енергії деформації як квадратичної форми

$$\mathbf{U} = \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{q}.$$

Для цього підставимо напруження і деформації в інтеграл енергії

$$U = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\, dV.$$

В результаті отримаємо матрицю жорсткості $\mathbf{K}$ з компонентами

$$K_{11} = \overline{E}(y_{23}^2 + a_1 x_{23}^2), \quad K_{12} = K_{21} = \overline{E}(a_1+\nu)x_{32}y_{23},$$

$$K_{13} = K_{31} = \overline{E}(y_{23}y_{31} + a_1 x_{23}x_{31}), \quad K_{14} = K_{41} = \overline{E}(a_1 x_{32}y_{31} + \nu x_{13}y_{23}),$$

$$K_{15} = K_{51} = \overline{E}(a_1 x_{12}x_{23}), \quad K_{16} = K_{61} = \overline{E}(a_1 x_{32}y_{12} + \nu x_{21}y_{23}),$$

$$K_{22} = \overline{E}(x_{23}^2 + a_1 y_{23}^2), \quad K_{23} = K_{32} = \overline{E}(a_1 x_{13}y_{23} + \nu x_{32}y_{31}),$$

$$K_{24} = K_{42} = \overline{E}(x_{23}x_{31} + a_1 y_{23}y_{31}), \quad K_{25} = K_{52} = \overline{E}(a_1 x_{21}y_{23} + \nu x_{32}y_{12}),$$

$$K_{26} = K_{62} = \overline{E}(x_{12}x_{23} + a_1 y_{12}y_{23}), \quad K_{33} = \overline{E}(y_{31}^2 + a_1 x_{31}^2),$$

$$K_{34} = K_{43} = \overline{E}(a_1+\nu)x_{13}y_{31}, \quad K_{35} = K_{53} = \overline{E}(a_1 x_{12}x_{31} + \nu y_{12}y_{31}),$$

$$K_{36} = K_{63} = \overline{E}(a_1 x_{13}y_{12} + \nu x_{21}y_{31}), \quad K_{44} = \overline{E}(x_{31}^2 + a_1 y_{31}^2),$$

$$K_{45} = K_{54} = \overline{E}(a_1 x_{21}y_{31} + \nu x_{13}y_{12}), \quad K_{46} = K_{64} = \overline{E}(x_{12}x_{31} + a_1 y_{12}y_{31}),$$

$$K_{55} = \overline{E}(y_{12}^2 + a_1 x_{12}^2), \quad K_{56} = K_{65} = \overline{E}(a_1+\nu)x_{21}y_{12},$$

$$K_{66} = \overline{E}(x_{12}^2 + a_1 y_{12}^2),$$

$$\overline{E} = \frac{Eh}{4S(1-\nu^2)}, \quad S = \frac{1}{2}(x_{23}y_{31} - x_{31}y_{23}),$$

$$x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j, \quad (i,\, j = 1, 2, 3).$$

Якщо елемент навантажений діючими у його площині поверхневими $\mathbf{P}_{\mathbf{S}} = \{X_S \quad Y_S\}$ і об'ємними $\mathbf{P}_{\mathbf{V}} = \{X_V \quad Y_V\}$ силами, еквівалентні вузлові навантаження можна визначити, скориставшись виразами для роботи сил на переміщеннях точок їх прикладення

$$\mathbf{F}_{\mathbf{V}} = \int_V \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mathbf{V}}\, dV, \quad \mathbf{F}_{\mathbf{S}} = \int_S \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mathbf{S}}\, dS.$$

При достатньо малих розмірах скінченного елемента можна ввести середні значення інтенсивностей по полю скінченного елемента

$$X_S = X_S^O, \quad Y_S = Y_S^O, \quad X_V = X_V^O, \quad Y_V = Y_V^O.$$

Тоді вектор вузлових навантажень матиме вигляд

$$\mathbf{F} = \{P_1 \quad P_2 \quad P_1 \quad P_2 \quad P_1 \quad P_2\}^T, \qquad)$$

де

$$P_1 = \frac{X_S^O + hX_V^O}{3} S, \quad P_2 = \frac{Y_S^O + hY_V^O}{3} S,$$

S – площа елемента.

Зазначимо, що при визначенні компонентів матриці жорсткості доцільно координати вузлів елемента записувати зразу в глобальній системі координат, щоб виключити потім приведення локальної системи кожного елемента у глобальну.

Побудуємо матрицю жорсткості для прямокутного елемента (рисунок 6.5).

Приймаємо вектор вузлових переміщень у вигляді

$$\mathbf{q} = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4\}^T.$$

Індекси у переміщеннях u і v позначають номер вузла, функція, що апроксимує поле переміщень, визначається поліномом

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy,$$
$$v = \alpha_1' + \alpha_2' x + \alpha_3' y + \alpha_4' xy.$$

Якщо локальна система координат має початок у центрі ваги елемента (рисунок 6.5), умови для визначення коефіцієнтів мають вигляд

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{2} \\ y &= \frac{b}{2} \end{aligned}\right\} u = u_3,\, v = v_3; \qquad \left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{2} \\ y &= -\frac{b}{2} \end{aligned}\right\} u = u_2,\, v = v_2;$$

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{a}{2} \\ y &= -\frac{b}{2} \end{aligned}\right\} u = u_1,\, v = v_1; \qquad \left.\begin{aligned} x &= -\frac{a}{2} \\ y &= \frac{b}{2} \end{aligned}\right\} u = u_4,\, v = v_4.$$

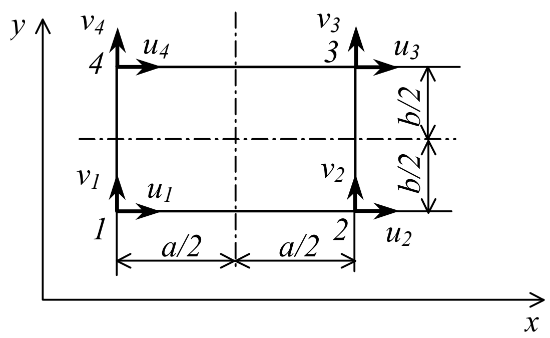


Рисунок 13.17 – Прямокутний елемент

Після визначення коефіцієнтів матимемо залежність

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix},$$

де

$$N_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\frac{y}{b} + \frac{xy}{ab}, \quad N_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\frac{y}{b} - \frac{xy}{ab},$$
$$N_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\frac{y}{b} + \frac{xy}{ab}, \quad N_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\frac{y}{b} + \frac{xy}{ab}.$$

Деформації визначаються залежністю

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q},$$

де

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{N},$$

$$
\mathbf{B}=\frac{1}{ab}\left[\begin{matrix}
b\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{y}{b}\right) & 0 & b\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{y}{b}\right) & 0 \\
0 & a\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{a}\right) & 0 & a\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{a}\right) \\
x\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{a}\right) & b\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{y}{b}\right) & a\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{a}\right) & b\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{y}{b}\right)
\end{matrix}\right.
$$

$$
\left.\begin{matrix}
b\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{y}{b}\right) & 0 & b\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{y}{b}\right) & 0 \\
0 & a\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{a}\right) & 0 & a\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{a}\right) \\
a\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{a}\right) & b\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{y}{b}\right) & a\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{a}\right) & b\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{y}{b}\right)
\end{matrix}\right].
$$

Вектор напружень

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{CBq}.$$

Матриця жорсткості

$$\mathbf{K}=\int_V \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{CB}\,dV .$$

Компоненти матриць жорсткості і сил для системи елементів визначаються за такою ж методикою, що і для стержневих систем, – з використанням матриці індексів.

Більш складним виявляється врахування ненульових граничних умов. Якщо j – напрямок, у якому вузлове значення переміщення задається явно, наприклад, $u_j=u_0$, то в j-й рядок матриці системи вносяться нулі, крім діагональної позиції, де ставиться 1, а в j-й рядок матриці **F** вводиться значення u_0.

Згідно з другим варіантом, діагональний елемент у j-ому рядку множиться на дуже велике число, а j-й елемент у матриці **F** замінюється добутком того ж числа на u_0 і діагональний елемент K_{jj}. Приклади використання одержаних матриць для плоских скінченних елементів наведені нижче.

Приклад 13.3. Визначити вузлові переміщення і напруження для пластини, завантаженої силою в її площині. Схема навантаження, скінченний елемент і схема розділення на скінченні елементи показані нижче на рисунку.

Вхідні дані

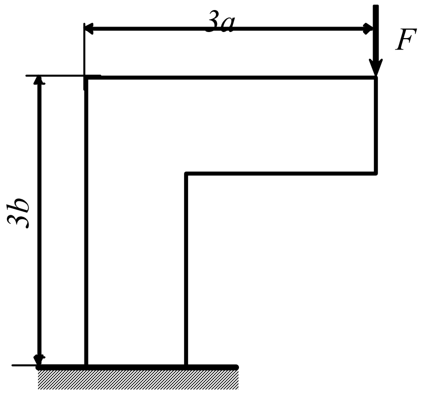
$a := 1 \qquad b := 1 \qquad h := 0.02 \qquad E := 2\cdot 10^{11} \qquad \nu := 0.3 \qquad jj := 1\,..\,19$

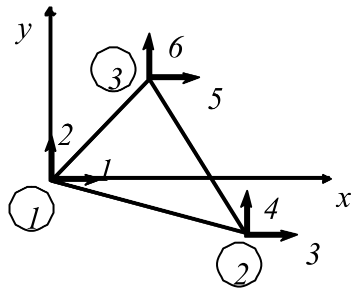
$x := \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & a & 0 & a & 0 & a & 2\cdot a & 2\cdot a & 3\cdot a & 3\cdot a \end{pmatrix}^T \qquad G := \dfrac{E}{2\cdot(1+\nu)}$

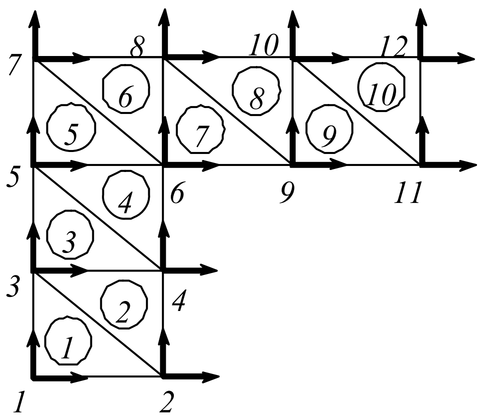
$y := \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & b & 2\cdot b & 2\cdot b & 3\cdot b & 3\cdot b & 2\cdot b & 3\cdot b & 2\cdot b & 3\cdot b \end{pmatrix}^T$

$xd := \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 & 3\cdot a & 3\cdot a & a \end{pmatrix}^T$

$yd := \begin{pmatrix} 3\cdot b & 0 & 0 & 3\cdot b & 3\cdot b & 2\cdot b & 2\cdot b \end{pmatrix}^T$







$\text{Nod} := \text{augment}(x, y)^T \qquad \text{nv} := \text{cols}(x) \qquad jj := 1\,..\,\text{nv}$

Матриця координат вузлів

$$\text{Nod} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Топологічна матриця

$$\text{Top} := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 7 & 6 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 6 & 9 & 9 & 11 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 & 10 & 10 & 12 \end{pmatrix}^T$$

Кількість елементів $\quad \text{ne} := \text{rows}(\text{Top})$

Кількість вузлів у елементі $\quad \text{nve} := \text{cols}(\text{Top})$

$j := 1\,..\,\text{nve} \qquad i := 1\,..\,\text{ne} \qquad \text{nve} = 3 \qquad \text{ne} = 10$

Координати вузлів кожного елемента

$X_{j,i} := Nod_{1,Top_{i,j}}$ $\qquad$ $Y_{j,i} := Nod_{2,Top_{i,j}}$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Формування матриці жорсткості елемента

$x12(i) := X_{1,i} - X_{2,i}$ $\qquad$ $x13(i) := X_{1,i} - X_{3,i}$ $\qquad$ $x23(i) := X_{2,i} - X_{3,i}$

$x31(i) := -x13(i)$ $\qquad$ $x21(i) := -x12(i)$ $\qquad$ $x32(i) := -x23(i)$

$y12(i) := Y_{1,i} - Y_{2,i}$ $\qquad$ $y23(i) := Y_{2,i} - Y_{3,i}$ $\qquad$ $y13(i) := Y_{1,i} - Y_{3,i}$

$y21(i) := -y12(i)$ $\qquad$ $y32(i) := -y23(i)$ $\qquad$ $y31(i) := -y13(i)$

$$A(i) := \frac{x23(i)\cdot y31(i) - x31(i)\cdot y23(i)}{2}$$

$h := 0.02$ Товщина пластини

$$B(i) := \begin{pmatrix} y23(i) & 0 & y31(i) & 0 & y12(i) & 0 \\ 0 & x32(i) & 0 & x13(i) & 0 & x21(i) \\ x32(i) & y23(i) & x13(i) & y31(i) & x21(i) & y12(i) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2\cdot A(i)}$$

Матриця пружних модулів $D := \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \cdot \dfrac{E}{1-\nu^2}$

Матриця жорсткості елемента $Ke(i) := B(i)^T \cdot D \cdot B(i) \cdot h \cdot A(i)$

Формування матриці індексів

$mi_{i,(2\cdot j-1)} := 2\cdot Top_{i,j} - 1$

$mi_{i,2\cdot j} := 2\cdot Top_{i,j}$

$i := 1..10$

$k := 1..6$

$jj := 1..6$

$$mi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 10 & 7 & 8 & 11 & 12 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 13 & 14 & 11 & 12 & 15 & 16 \\ 11 & 12 & 17 & 18 & 15 & 16 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 17 & 18 & 21 & 22 & 19 & 20 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix}$$

Формування матриці жорсткості пластини

$$K_{24,24} := 0 \qquad K_{mi_{i,jj},mi_{i,k}} := K_{mi_{i,jj},mi_{i,k}} + Ke(i)_{jj,k}$$

Вектор зовнішніх навантажень

$$FS := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$$

Граничні умови: U1,U2,U3,U4 ekv 0

$$m := 1..20 \quad n := 1..20 \quad KS_{m,n} := K_{(m+4),(n+4)}$$

Переміщення вузлів: $U := KS^{-1} \cdot FS \qquad Nul := (0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0)$

Повний вектор переміщень $US := \text{augment}\left(Nul, U^T\right)^T$

Побудова схеми переміщень вузлів пластини $s := 1..12$

$$X := \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & a & 0 & a & 0 & a & 2\cdot a & 2\cdot a & 3\cdot a & 3\cdot a \end{pmatrix}^T$$

$$Y := \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & b & 2\cdot b & 2\cdot b & 3\cdot b & 3\cdot b & 2\cdot b & 3\cdot b & 2\cdot b & 3\cdot b \end{pmatrix}^T$$

$$Xd := \begin{pmatrix} 2\cdot a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & a & a & a & a & a & 2\cdot a & 3\cdot a \end{pmatrix}^T$$

$$Yd := \begin{pmatrix} 3\cdot b & 3\cdot b & 3\cdot b & 2\cdot b & b & 0 & 0 & b & 2\cdot b & 3\cdot b & 2\cdot b & 2\cdot b & 2\cdot b \end{pmatrix}^T$$

$$Xp := \text{augment}\left(X^T, Xd^T\right)^T \qquad Yp := \text{augment}\left(Y^T, Yd^T\right)^T$$

$$Ux_s := US_{2\cdot s-1} \qquad Uy_s := US_{2\cdot s}$$

$$Uxd := \left(Ux_{10} \ \ Ux_8 \ \ Ux_7 \ \ Ux_5 \ \ Ux_3 \ \ Ux_1 \ \ Ux_2 \ \ Ux_4 \ \ Ux_6 \ \ Ux_8 \ \ Ux_6 \ \ Ux_9 \ \ Ux_{11}\right)$$

$$Uyd := \left(Uy_{10} \ \ Uy_8 \ \ Uy_7 \ \ Uy_5 \ \ Uy_3 \ \ Uy_1 \ \ Uy_2 \ \ Uy_4 \ \ Uy_6 \ \ Uy_8 \ \ Uy_6 \ \ Uy_9 \ \ Uy_{11}\right)$$

$$Uxg := \text{augment}\left(Ux^T, Uxd\right) \qquad Uyg := \text{augment}\left(Uy^T, Uyd\right)$$

$$XG := Xp^T + Uxg \cdot 10^8 \cdot 0.5$$

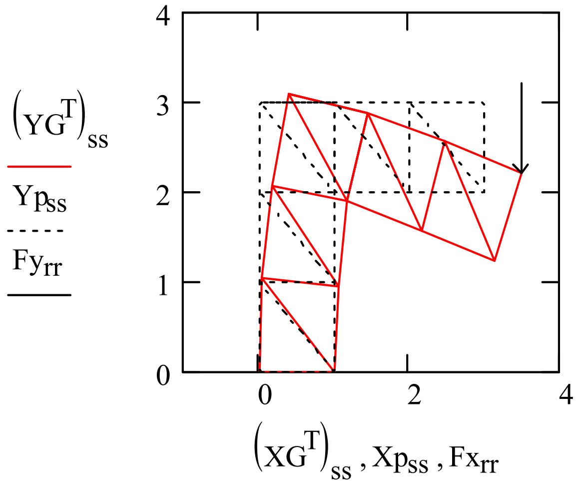
$$YG := Yp^T + Uyg \cdot 10^8 \cdot 0.5$$

$$Fx := \left[\left(XG^T\right)_{12} \ \ \left(XG^T\right)_{12} \ \ \left(XG^T\right)_{12} - 0.1 \ \ \left(XG^T\right)_{12} \ \ \left(XG^T\right)_{12} + 0.1 \right]^T$$

$$Fy := \left[\left(YG^T\right)_{12} + 1 \ \ \left(YG^T\right)_{12} \ \ \left(YG^T\right)_{12} + 0.1 \ \ \left(YG^T\right)_{12} \ \ \left(YG^T\right)_{12} + 0.1 \right]^T$$

$Ux_s =$	$Uy_s =$
0	0
0	0
$8.244\cdot10^{-10}$	$6.215\cdot10^{-10}$
$8.947\cdot10^{-10}$	$-1.098\cdot10^{-9}$
$3.403\cdot10^{-9}$	$1.21\cdot10^{-9}$
$3.409\cdot10^{-9}$	$-2.164\cdot10^{-9}$
$8.144\cdot10^{-9}$	$1.639\cdot10^{-9}$
$8.7\cdot10^{-9}$	$-2.42\cdot10^{-9}$
$2.991\cdot10^{-9}$	$-8.642\cdot10^{-9}$
$9.234\cdot10^{-9}$	$-8.775\cdot10^{-9}$
$2.843\cdot10^{-9}$	$-1.565\cdot10^{-8}$
$9.529\cdot10^{-9}$	$-1.6\cdot10^{-8}$

$ss := 1..25 \qquad rr := 1..5$



Визначення напружень $\sigma x, \sigma y, \tau xy$

$$al := \frac{(1 - v)}{2} \qquad v := 0.3$$

$$E_\sigma(i) := \frac{E}{2\cdot A(i)\cdot\left(1 - v^2\right)}\cdot\begin{pmatrix} y23(i) & -v\cdot x23(i) & y31(i) & -v\cdot x31(i) & -y21(i) & v\cdot x21(i) \\ v\cdot y23(i) & -x23(i) & v\cdot y31(i) & -x31(i) & -v\cdot y21(i) & x21(i) \\ -a1\cdot x23(i) & al\cdot y23(i) & -al\cdot x31(i) & al\cdot y31(i) & al\cdot x21(i) & -al\cdot y21(i) \end{pmatrix}$$

$$j := 1..6 \qquad Nul := (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0) \qquad US := augment\left(Nul, U^T\right)^T$$

$$W_{i,j} := US_{mi_{i,j}} \qquad WT := W^T \qquad \sigma^{\langle i\rangle} := E_\sigma(i)\cdot WT^{\langle i\rangle}$$

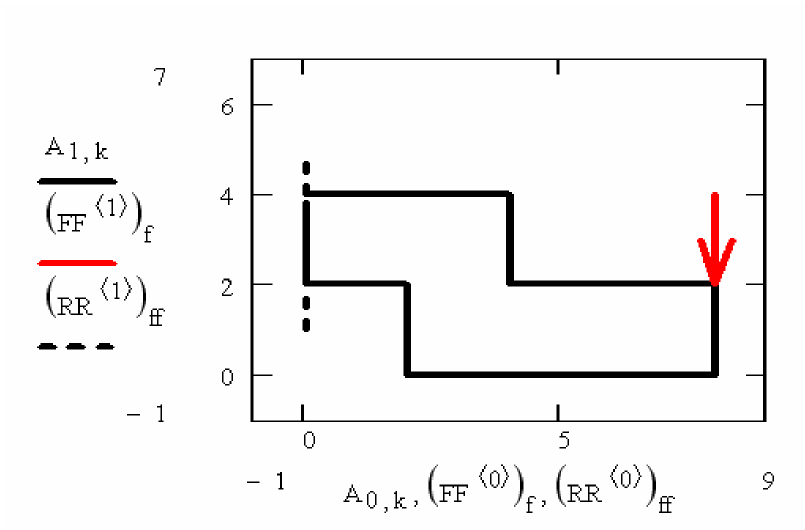
$$\sigma = \begin{pmatrix} 40.976 & -56.913 & 54.237 & -68.875 & 29.728 & 105.234 & -108.648 & 108.648 & -41.472 & 41.472 \\ 136.588 & -236.588 & 133.912 & -233.912 & 94.766 & -19.624 & -83.789 & 6.106 & -38.93 & -58.528 \\ 63.412 & -63.412 & 66.088 & -66.088 & 105.234 & 94.766 & -91.352 & -8.648 & -58.528 & -41.472 \end{pmatrix}$$

У матриці σ перший рядок – напруження σ_x, другий – σ_y, третій – τ_{xy}.

Автоматична побудова сітки скінченних елементів для плоских пластинчатих конструкцій

Розв’язання практичних задач аналізу конструкцій за допомогою методу скінченних елементів потребує розгляду моделей з великою кількістю елементів. У реальних задачах їх кількість досягає сотен тисяч. Найбільш трудомісткою операцією при підготовці даних є розділення на скінченні елементи (побудова сітки скінченних елементів) . Для її реалізації розроблено багато алгоритмів [15]. Більшість з них потребує професійного і достатньо громіздкого програмного забезпечення. Нижче наведені два приклади, які використовують алгоритм прямої триангуляції [16]. Процедура побудови сітки базується на послідовному заповненні плоскої області елементами від її границі, яка попередньо розділяється на задану кількість відрізків. Згідно з алгоритмом будуються масиви координат вузлових точок X і Y, а також список елементів сітки, у якому кожному трикутному елементу ставиться у відповідність три числа – номери вузлів, які є вершинами даного трикутника. До форми трикутних елементів ставиться ряд умов, які гарантують відсутність елементів з кутами, меншими тридцяти і більшими дев'яноста градусів.

Приклад 6.3 Визначення напружень у пластині, навантаженій силою у її площині



Вхідними даними для розділення на трикутні елементи є координати початкових точок контура

$$in := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

і кількість відрізків, на які поділяється довжина відрізка між початковими точками, к=1/m (у даному прикладі прийнято m=0.2).

Довжина відрізка між точками з координатами Хо,Уо і Х1,У1

$$\text{line\_len}(X,Y) := \sqrt{\left(X_0 - Y_0\right)^2 + \left(X_1 - Y_1\right)^2}$$

Обчислення кута між двома відрізками. Точки трикутника обходяться за годинниковою стрілкою

$$\text{ap}(X,Y,Z) = \left| \begin{array}{l} a = \text{line\_len}(X,Y) \\ b \leftarrow \text{line\_len}(Y,Z) \\ c \leftarrow \text{line\_len}(X,Z) \\ \cos \leftarrow \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \\ al \leftarrow \operatorname{acos}(\cos) \ \text{ if } X_0 \cdot \left(Y_1 - Z_1\right) + Y_0 \cdot \left(Z_1 - X_1\right) + Z_0 \cdot \left(X_1 - Y_1\right) < 0 \\ al \leftarrow \pi \cdot 3 \ \text{ otherwise} \\ ap \leftarrow al \end{array} \right.$$

Обчислення координат точок, які ділять заданий відрізок на n частин

$$cut(X, Y, melk) := \left| \begin{array}{l} l \leftarrow line\_len(X, Y) \\ n \leftarrow ceil\left(\frac{l}{melk}\right) \\ RES \leftarrow X \\ \text{for } i \in 1..n-1 \quad \text{if } n > 1 \\ \quad RES \leftarrow augment\left[RES, X + \frac{(Y - X) \cdot i}{n}\right] \\ cut \leftarrow RES \end{array} \right.$$

Видалення точки з масиву точок

$$dc(M, i) := \left| \begin{array}{l} dc \leftarrow submatrix(M, 0, rows(M) - 1, 1, cols(M) - 1) \quad \text{if } i = 0 \\ \text{otherwise} \\ \quad \left| \begin{array}{l} dc \leftarrow submatrix(M, 0, rows(M) - 1, 0, cols(M) - 2) \quad \text{if } i = cols(M) - 1 \\ \text{otherwise} \\ \quad \left| \begin{array}{l} dc1 \leftarrow submatrix(M, 0, rows(M) - 1, 0, i - 1) \\ dc2 \leftarrow submatrix(M, 0, rows(M) - 1, i + 1, cols(M) - 1) \\ dc \leftarrow augment(dc1, dc2) \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Одержання масиву точок на контурі фігури з урахуванням значення m

$$cut\_ring(M, melk) := \left| \begin{array}{l} RES \leftarrow cut\left(M^{\langle 0 \rangle}, M^{\langle 1 \rangle}, melk\right) \\ \text{for } i \in 1..cols(M) - 1 \\ \quad RES \leftarrow augment\left(RES, cut\left(M^{\langle i \rangle}, M^{\langle mod(i+1, cols(M)) \rangle}, melk\right)\right) \\ cut\_ring \leftarrow RES \end{array} \right.$$

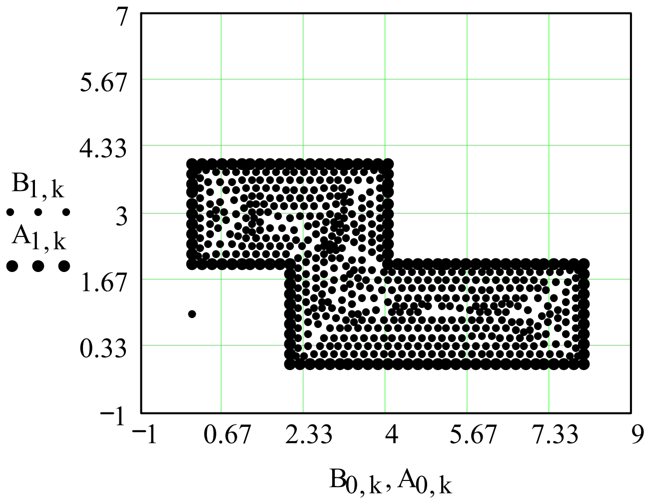
Програма тріангуляції ↓

$$\iota(M) = \left|\ \begin{array}{l}
\text{nodes_left} = \text{cols}(M),\ \text{for } i \in 0..\text{nodes_left}-1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{WORK}_i \leftarrow i \\
\text{ntr} \leftarrow 0 \\
\text{while nodes_left} > 3 \\
\quad a \leftarrow \text{last}(\text{WORK}),\ \text{ma} \leftarrow \text{ap}\left[M^{\langle(\text{WORK}_a)\rangle}, M^{\langle \text{WORK}_0\rangle}, M^{\langle \text{WORK}_1\rangle}\right] \\
\quad \text{ma} \leftarrow \text{ap}\left[M^{\langle(\text{WORK}_a)\rangle}, M^{\langle \text{WORK}_0\rangle}, M^{\langle \text{WORK}_1\rangle}\right],\ \text{min_point} \leftarrow 0 \\
\quad \text{for } i \in 1..\text{nodes_left}-1 \\
\qquad \text{angle_i} \leftarrow \text{ap}\left(M^{\langle \text{WORK}_{i-1}\rangle}, M^{\langle \text{WORK}_i\rangle}, M^{\langle \text{WORK}_{\text{mod}(i+1,\,\text{nodes_left})}\rangle}\right) \\
\qquad \text{ma} \leftarrow \text{angle_i},\ \text{min_point} \leftarrow i\ \text{ if angle_i} < \text{ma} \\
\quad T1 \leftarrow M^{\langle \text{WORK}_{\text{mod}(\text{min_point}+\text{nodes_left}-1,\,\text{nodes_left})}\rangle} \\
\quad T2 \leftarrow M^{\langle \text{WORK}_{\text{min_point}}\rangle},\ T3 \leftarrow M^{\langle \text{WORK}_{\text{mod}(\text{min_point}+1,\,\text{nodes_left})}\rangle} \\
\quad \text{if ma} \le \dfrac{\pi}{3} \vee \left[\text{ma} < \dfrac{\pi}{2} \wedge \left(\text{ap}(T2,T1,T3) \ge \dfrac{\pi}{6} \wedge \text{ap}(T2,T3,T1) \ge \dfrac{\pi}{6}\right)\right] \\
\qquad \text{TR}_{\text{ntr},0} \leftarrow \text{WORK}_{\text{mod}(\text{min_point}+\text{nodes_left}-1,\,\text{nodes_left})} \\
\qquad \text{TR}_{\text{ntr},1} \leftarrow \text{WORK}_{\text{min_point}},\ \text{TR}_{\text{ntr},2} \leftarrow \text{WORK}_{\text{mod}(\text{min_point}+1,\,\text{nodes_left})} \\
\qquad \text{ntr} \leftarrow \text{ntr}+1,\ \text{WORK} \leftarrow \text{dc}\left(\text{WORK}^T, \text{min_point}\right)^T,\ \text{nodes_left} \leftarrow \text{nodes_left}-1 \\
\quad \text{otherwise} \\
\qquad \text{alpha} \leftarrow \dfrac{\text{ma}}{2} + \text{angle}\left[(T1-T2)_0, (T1-T2)_1\right] \\
\qquad r \leftarrow \dfrac{\text{line_len}(T1,T2) + \text{line_len}(T2,T3)}{2} \\
\qquad T4_0 \leftarrow T2_0 + r\cdot\cos(\text{alpha}),\ T4_1 \leftarrow T2_1 + r\cdot\sin(\text{alpha}) \\
\qquad \text{TR}_{\text{ntr},0} \leftarrow \text{WORK}_{\text{mod}(\text{min_point}+\text{nodes_left}-1,\,\text{nodes_left})} \\
\qquad \text{TR}_{\text{ntr},1} \leftarrow \text{WORK}_{\text{min_point}},\ \text{TR}_{\text{ntr},2} \leftarrow \text{cols}(M),\ \text{ntr} \leftarrow \text{ntr}+1 \\
\qquad \text{TR}_{\text{ntr},0} \leftarrow \text{WORK}_{\text{min_point}},\ \text{TR}_{\text{ntr},1} \leftarrow \text{WORK}_{\text{mod}(\text{min_point}+1,\,\text{nodes_left})} \\
\qquad \text{TR}_{\text{ntr},2} \leftarrow \text{cols}(M),\ \text{ntr} \leftarrow \text{ntr}+1,\ M \leftarrow \text{augment}(M, T4) \\
\qquad \text{WORK}_{\text{min_point}} \leftarrow \text{cols}(M)-1 \\
\text{TR}_{\text{ntr},0} \leftarrow \text{WORK}_0,\ \text{TR}_{\text{ntr},1} \leftarrow \text{WORK}_1,\ \text{TR}_{\text{ntr},2} \leftarrow \text{WORK}_2 \\
\text{for } i \in 0..\text{cols}(M)-1 \\
\quad M_{2,i} \leftarrow \text{cols}(M) \\
t \leftarrow \text{augment}\left(M, \text{TR}^T\right)
\end{array}\right.$$

(Для користування програмою триангуляції, наведеній на попередній сторінці, необхідно залишити по одному оператору у кожному рядку, перенісши записані через кому оператори у нові рядки).

Вузлові точки, одержані у результаті роботи програми триангуляції,

$B = t(A) \qquad k := 0..650$



Побудова сітки скінченних елементів

$Nodes := submatrix(B,0,1,0,626) \qquad Top := submatrix(B,0,2,627,1758)^T$

Nodes =

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4
1	4	4	4	4	4	4	4	4

Top^T =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	119	0	19	20	49	50	59	60	89	90
1	0	1	20	21	50	51	60	61	90	91
2	120	120	121	121	122	122	123	123	124	124

Координати вузлів елементів

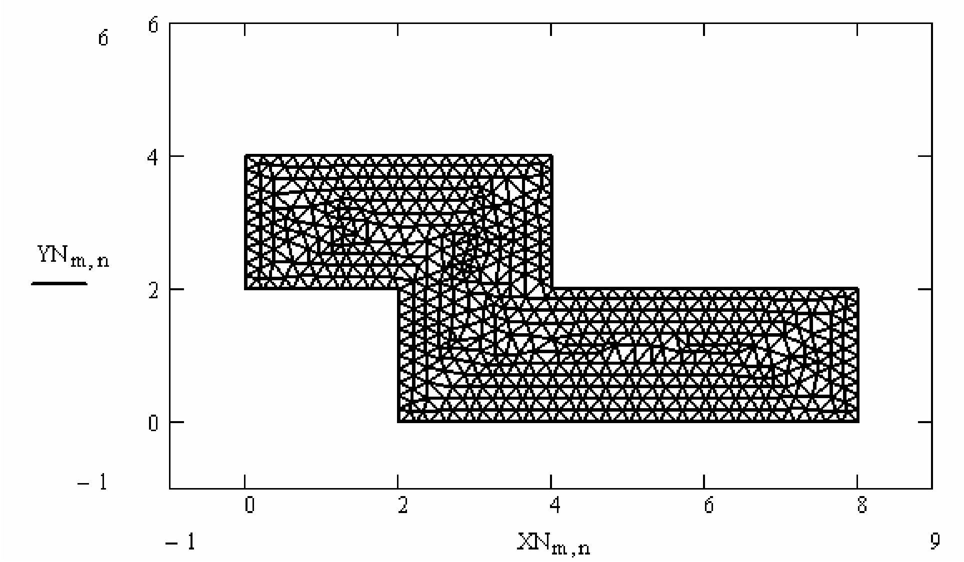
$cols(Top) = 3 \qquad j := 0..cols(Top)-1 \qquad ie := 0..rows(Top)-1 \qquad rows(Top) = 1.132\times10^3$

$Xn_{j,ie} := Nodes_{0,\left(Top_{ie,j}\right)} \qquad Yn_{j,ie} := Nodes_{1,\left(Top_{ie,j}\right)}$

$I_{ie} := 10^8 \qquad XN := augment\left[Xn^T,\left(Xn^T\right)^{\langle 0\rangle},I\right]$

$YN := augment\left[Yn^T,\left(Yn^T\right)^{\langle 0\rangle},I\right]$

$m := 0..rows(Top) \qquad n := 0..cols(Top)+2$



Розрахунок напружень у пластині

$NOD := Nodes$ $\quad cols(NOD) = 627$ $\quad rows(NOD) = 2$

$h := 0.04$ товщина пластини

$TOP := Top$ топологічна матриця

$rows(TOP) = 1.132 \times 10^3$ $\quad i := 0..1131$

$cols(TOP) = 3$ $\quad j := 0..2$

$E := 2 \cdot 10^{11}$ модуль пружності

$\nu := 0.3$ коефіцієнт Пуассона

$$G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$ модуль зсуву

Координати вузлів кожного елемента

$X_{j,i} := NOD_{0,TOP_{i,j}}$ $\quad Y_{j,i} := NOD_{1,TOP_{i,j}}$

Формування матриці жорсткості елемента

$x01(i) := X_{0,i} - X_{1,i}$ $\quad x02(i) := X_{0,i} - X_{2,i}$ $\quad x12(i) := X_{1,i} - X_{2,i}$

$x20(i) := -x02(i)$ $\quad x10(i) := -x01(i)$ $\quad x21(i) := -x12(i)$

$y01(i) := Y_{0,i} - Y_{1,i}$ $\quad y12(i) := Y_{1,i} - Y_{2,i}$ $\quad y02(i) := Y_{0,i} - Y_{2,i}$

$y10(i) := -y01(i)$ $\quad y21(i) := -y12(i)$ $\quad y20(i) := -y02(i)$

$$A(i) := \left| \frac{x12(i) \cdot y20(i) - x20(i) \cdot y12(i)}{2} \right|$$

$$B(i) := \begin{pmatrix} y12(i) & 0 & y20(i) & 0 & y01(i) & 0 \\ 0 & x21(i) & 0 & x02(i) & 0 & x10(i) \\ x21(i) & y12(i) & x02(i) & y20(i) & x10(i) & y01(i) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2 \cdot A(i)}$$

$$D := \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{E}{1-(\nu)^2}$$

Фізичні залежності

$$Ke(i) := B(i)^T \cdot D \cdot B(i) \cdot h \cdot A(i)$$

$$mi_{i,(2\cdot j)} := 2 \cdot TOP_{i,j}$$

$$mi_{i,2\cdot j+1} := 2 \cdot TOP_{i,j} + 1$$

Формування матриці індексів

Формування матриці жорсткості пластини

$K_{max(mi),max(mi)} := 0$ $\quad max(mi) = 1.253 \times 10^3$ $\quad k := 0..5$ $\quad p := 0..5$

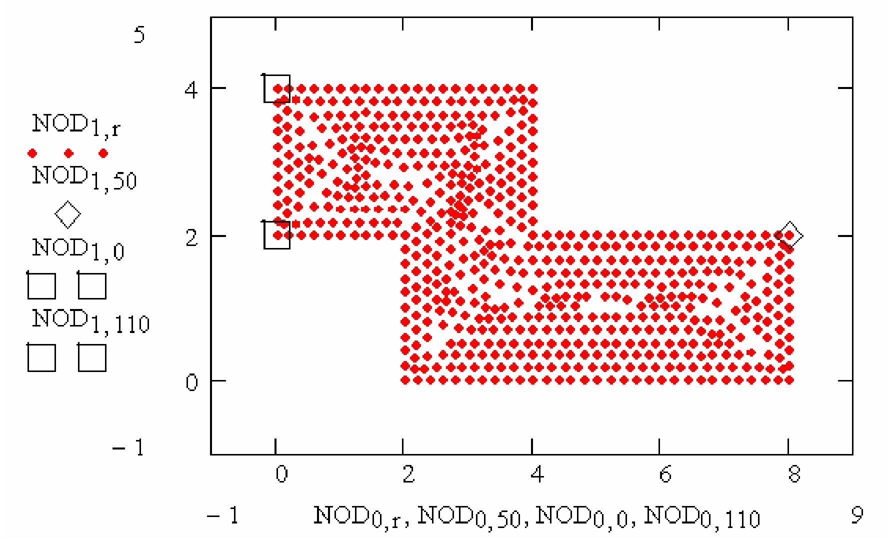
$$K_{mi_{i,p},mi_{i,k}} := K_{mi_{i,p},mi_{i,k}} + (Ke(i))_{p,k}$$

$FS_{101} := -100$ $\quad FS_{max(mi)-20} := 0$

Вектор вузлових сил (сила діє на координату 101)

$r := 0..cols(NOD) - 1$

Закріплені точки відрізка 110-0 , навантаження прикладене по координаті 50



Редукція матриці жорсткості з урахуванням умов закріплення

$K1 := stack(submatrix(K,0,219,0,219), submatrix(K,240,1253,0,219))$

$K2 := stack(submatrix(K,0,219,240,1253), submatrix(K,240,1253,240,1253))$

$K0 := augment(K1,K2)$

редуційована матриця жорсткості

Розв”язок відносно вузлових переміщень

$$U := K0^{-1} \cdot FS$$

Повний вектор переміщень

$$NUL_{19} := 0 \qquad US := \text{stack}(\text{submatrix}(U, 0, 219, 0, 0), NUL, \text{submatrix}(U, 220, 1233, 0, 0))$$

$$a := \frac{(1-\nu)}{2} \qquad b(i) := \frac{E}{2 \cdot A(i) \cdot \left(1-\nu^2\right)}$$

$$E_\sigma(i) := b(i) \cdot \begin{pmatrix} y12(i) & -\nu \cdot x12(i) & y20(i) & -\nu \cdot x20(i) & -y10(i) & \nu \cdot x10(i) \\ \nu \cdot y12(i) & -x12(i) & \nu \cdot y20(i) & -x20(i) & -\nu \cdot y10(i) & x10(i) \\ -a \cdot x12(i) & a \cdot y12(i) & -a \cdot x20(i) & a \cdot y20(i) & a \cdot x10(i) & -a \cdot y10(i) \end{pmatrix}$$

Переміщення вузлових точок кожного елемента

$$j := 0..5 \qquad W_{i,j} := US_{mi_{i,j}} \qquad WT := W^T$$

Визначення напружень у елементах.(Кожен стовпець у матриці σ вміщує нормальні напруження σx і σy, а також дотичне напруження τxy).

$$\sigma^{\langle i \rangle} := E_\sigma(i) \cdot WT^{\langle i \rangle}$$

$\sigma =$

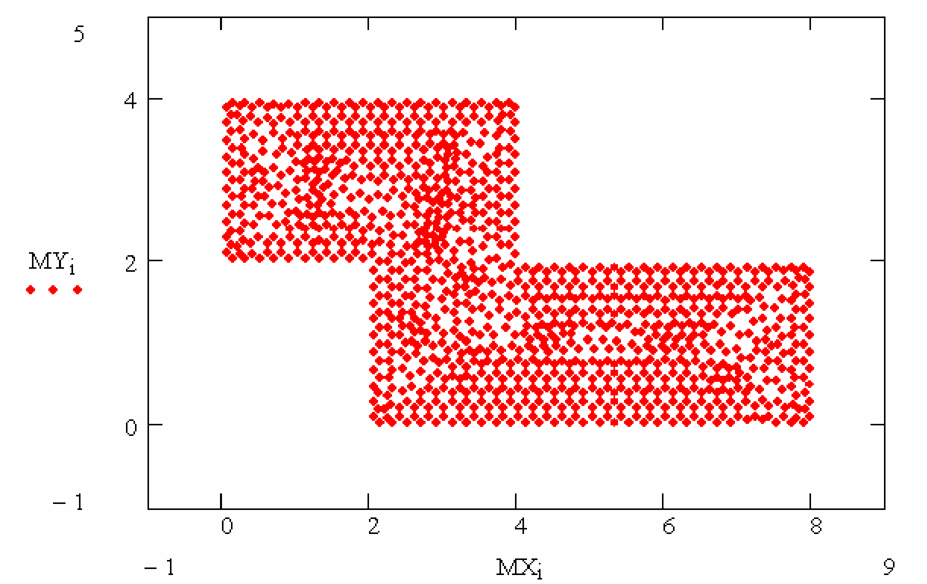
	0	1	2	3	4	5
0	$-2.461 \cdot 10^4$	$-2.973 \cdot 10^3$	149.64	-107.526	$-4.332 \cdot 10^3$	-677.989
1	$-8.323 \cdot 10^3$	-459.74	-111.601	150.543	$8.237 \cdot 10^3$	$2.423 \cdot 10^4$
2	$-1.164 \cdot 10^4$	$-3.694 \cdot 10^3$	-73.37	-74.71	$7.003 \cdot 10^3$	$1.713 \cdot 10^3$

Для побудови графіка розподілення напружень по пластині визначаємо центри мас скінченних елементів

$$MXY := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..\text{rows}(TOP) - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..2 \\ \quad v_j \leftarrow TOP_{i,j} \\ \text{for } j \in 0..2 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_j \leftarrow NOD_{0, v_j} \\ y_j \leftarrow NOD_{1, v_j} \end{array} \right. \\ xm_i \leftarrow \text{mean}(x) \\ ym_i \leftarrow \text{mean}(y) \end{array} \right. \\ MXY \leftarrow \text{augment}(xm, ym) \end{array} \right.$$

$MX := MXY^{\langle 0 \rangle}$ $\quad MY := MXY^{\langle 1 \rangle}$ $\quad rows(MX) = 1.132 \times 10^{3}$

$\sigma_x := \left(\sigma^T\right)^{\langle 0 \rangle}$ $\quad \sigma_y := \left(\sigma^T\right)^{\langle 1 \rangle}$ $\quad \tau_{xy} := \left(\sigma^T\right)^{\langle 2 \rangle}$ $\quad cols(\sigma) = 1.132 \times 10^{3}$



Еквівалентне напруження за третьою гіпотезою міцності

$\sigma_{ekv}^T =$

	0	1	2	3	4	5	6
0	$2.84 \cdot 10^4$	$7.804 \cdot 10^3$	299.633	298.205	$1.882 \cdot 10^4$	$2.514 \cdot 10^4$	125.692

$MXY^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.047	0.114	3.886	3.953	7.886	7.953	7.953	7.886	2.114	2.047
1	3.886	3.953	3.953	3.886	1.953	1.886	0.114	0.047	0.047	0.114

Побудова графіка розподілення еквівалентних напружень

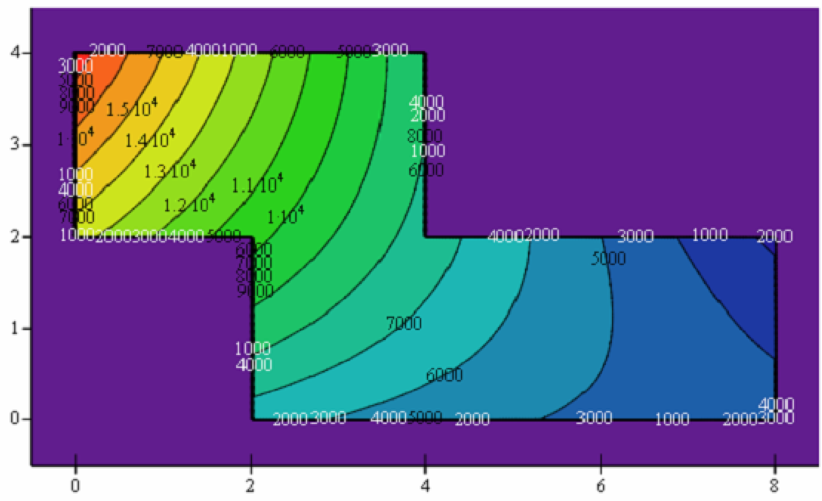
$V := \sigma_{ekv}$ $\quad M := MXY$ $\quad n := 2$ $\quad R := regress(M, V, n)$

$$f(x,y) := interp\left[R, M, V, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]$$

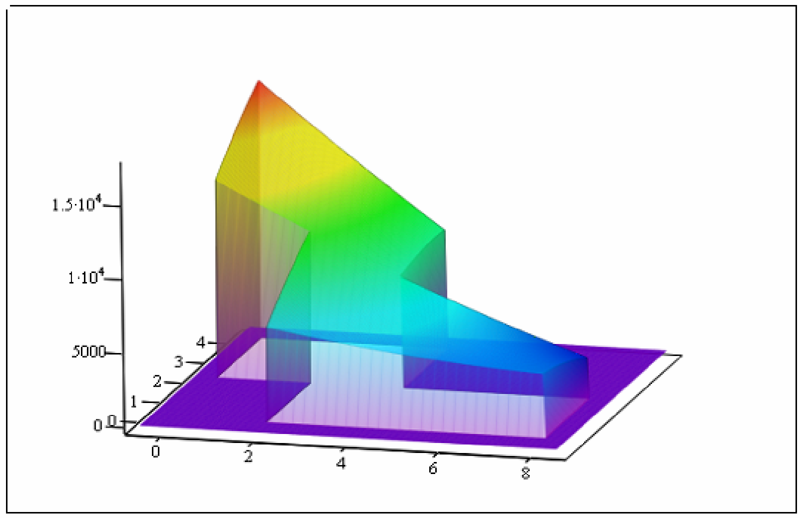
$$fr(x,y) := \left| \begin{array}{l} fr \leftarrow f(x,y) \\ fr \leftarrow if[(0 \le x \le 2 \wedge 2 \le y \le 4) \vee (2 \le x \le 4 \wedge 0 \le y \le 4) \vee (4 \le x \le 8 \wedge 0 \le y \le 2), fr, 0] \end{array} \right.$$

$x1 := -0.5 x2 := 8.5$ $\quad y1 := -0.5$ $\quad y2 := 4.5$ $\quad nx := 250$ $\quad ny := 250$

$FR := CreateMesh(fr, x1, x2, y1, y2, nx, ny)$



FR



FR

Приклад 6.4 Визначення напружень у перерізі стержня при крученні.

Задано форму, розміри перерізу і кут, на який закручується стержень. Вузлові точки, одержані у результаті триангуляції площі перерізу (квадрат 4х4) у відповідності з наведеною у попередньому прикладі програмою, розміщені у числових файлах Nod - масив координат x і y вузлових точок трикутних скінченних елементів і Top - топологічна матриця з координатами вузлів кожного елемента у відповідності з глобальною нумерацією вузлів.

NOD := READPRN("Nodes5.prn") масив вузлових точок

TOP := READPRN("TOP5.prn") топологічна матриця

NV := cols(TOP) NV = 3

NE := rows(TOP) NE = 140

NOD =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3.5
1	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1	0.5	0	0

TOP^T =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	31	0	7	8	15	16	23	24	32	1	6	7
1	0	1	8	9	16	17	24	25	1	2	7	33
2	32	32	33	33	34	34	35	35	36	36	37	37

$E := 1 \cdot 10^7$ модуль пружності (Н/см**2)

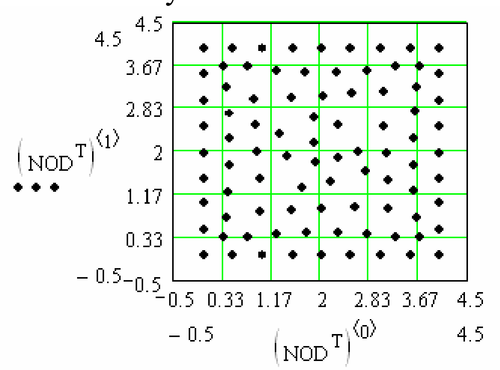
$\nu := 0.3$ коефіцієнт Пуассона

$G := \dfrac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$ модуль зсуву (Н/см**2)

$\theta := 1 \cdot \dfrac{\pi}{180}$ відносний кут закручування (град/м)

$i := 0..139$ $j := 0..2$

Вузлові точки



Координати вузлів кожного елемента

$X_{j,i} := NOD_{0, TOP_{i,j}}$ $Y_{j,i} := NOD_{1, TOP_{i,j}}$

Формування матриці жорсткості елемента

$x01(i) := X_{0,i} - X_{1,i}$ $x02(i) := X_{0,i} - X_{2,i}$ $x12(i) := X_{1,i} - X_{2,i}$ $x20(i) := -x02(i)$

$x10(i) := -x01(i)$ $x21(i) := -x12(i)$ $y01(i) := Y_{0,i} - Y_{1,i}$ $y12(i) := Y_{1,i} - Y_{2,i}$

$y02(i) := Y_{0,i} - Y_{2,i}$ $y10(i) := -y01(i)$ $y21(i) := -y12(i)$ $y20(i) := -y02(i)$

$A(i) := \left| \dfrac{x12(i) \cdot y20(i) - x20(i) \cdot y12(i)}{2} \right|$ $B(i) := \begin{pmatrix} y12(i) & y20(i) & y01(i) \\ x21(i) & x02(i) & x10(i) \end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{2 \cdot A(i)}$ $D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Матриця жорсткості елемента

$$Ke(i) := B(i)^T \cdot D \cdot B(i) \cdot A(i)$$

Матриця індексів $mi := TOP$

Формування глобальної матриці жорсткості

$K_{max(mi), max(mi)} := 0$ $max(mi) = 86$ $k := 0..2$ $p := 0..2$

$K_{mi_{i,p}, mi_{i,k}} := K_{mi_{i,p}, mi_{i,k}} + (Ke(i))_{p,k}$ $last\left(K^{\langle 0 \rangle}\right) = 86$

Врахування граничних умов на контурі

$K1 := submatrix(K, 32, 86, 32, 86)$ $last\left(K1^{\langle 0 \rangle}\right) = 54$

Вектор навантажень у елементах відповідний куту закручування 1 градус/м

$$Fe(i) := 2 \cdot G \cdot \theta \cdot \frac{A(i)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Вектор навантажень для системи елементів

$F_{max(mi)} := 0$ $F_{\left(mi_{i,j}\right)} := F_{\left(mi_{i,j}\right)} + Fe(i)_j$ $F1 := submatrix(F, 32, 86, 0, 0)$ $last(F) = 86$

Значення функції напружень у вузлах у відповідності з нумерацією

$\Phi1 := K1^{-1} \cdot F1$ $Nul_{31} := 0$ $\Phi := stack(Nul, \Phi1)$ $last(\Phi) = 86$

Значення функції напружень у вузлах кожного елемента

$k := 0..NE - 1$ $j := 0..2$ $\Phi e_{j,k} := \Phi_{\left(mi_{k,j}\right)}$

Дотичні напруження в елементах (сталі для кожного елемента)

$$\tau_{el}^{\langle k \rangle} := B(k) \cdot \Phi e^{\langle k \rangle}$$

$$T := 2 \int \Phi \, dA$$

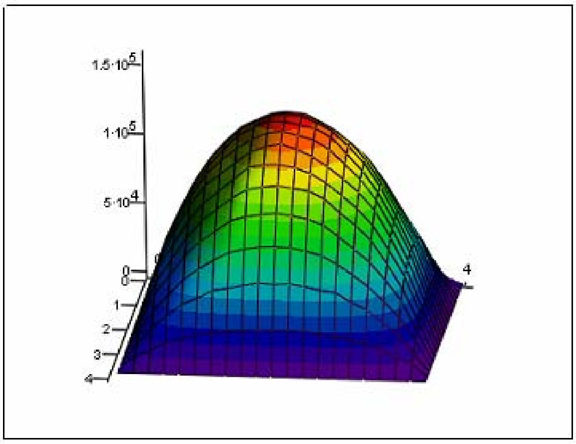
момент кручення (інтеграл обчислюється по площі поперечного перерізу)

$$T := \sum_{k=0}^{139} \frac{2}{3} \cdot A(k) \cdot \Phi e^{\langle k \rangle T} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

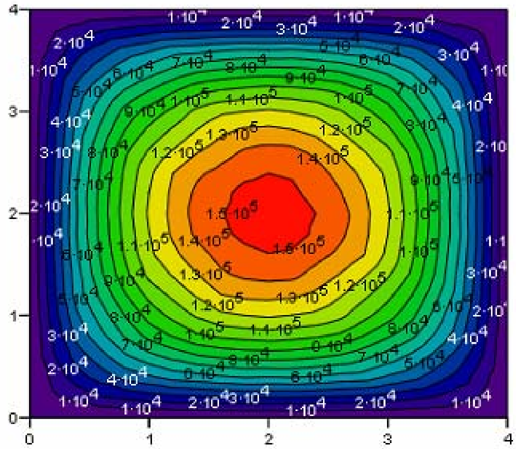
T = 2345934.367 нсм

Поверхня функції напружень

$Ny := \left(NOD^T\right)^{\langle 0 \rangle}$ $Nz := \left(NOD^T\right)^{\langle 1 \rangle}$



(Ny,Nz,Φ)



(Ny, Nz, Φ)

Побудова графіка розподілення напружень у перерізі

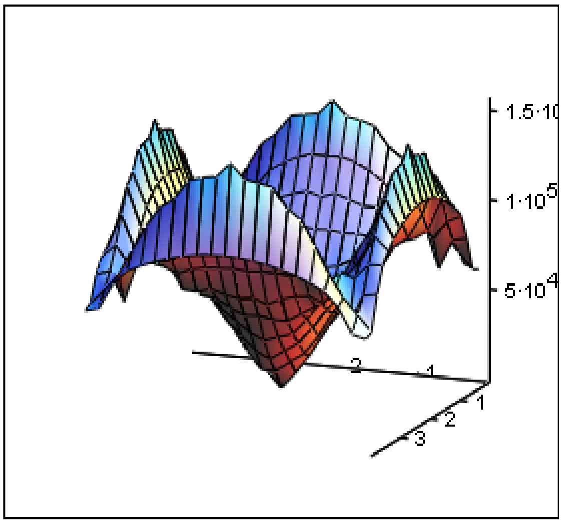
Обчислення положення центрів мас трикутних елементів

$$
MXY := \left|\begin{array}{l}
\text{for } i \in 0..\,\text{rows}(TOP)-1 \\
\quad \left|\begin{array}{l}
\text{for } j \in 0..\,2 \\
\quad v_j \leftarrow TOP_{i,j} \\
\text{for } j \in 0..\,2 \\
\quad \left|\begin{array}{l}
x_j \leftarrow NOD_{0,v_j} \\
y_j \leftarrow NOD_{1,v_j}
\end{array}\right. \\
xm_i \leftarrow \text{mean}(x) \\
ym_i \leftarrow \text{mean}(y)
\end{array}\right. \\
MXY \leftarrow \text{augment}(xm, ym)
\end{array}\right.
$$

$MX := MXY^{\langle 0\rangle}$ $MY := MXY^{\langle 1\rangle}$ $\text{rows}(MX) = 140$

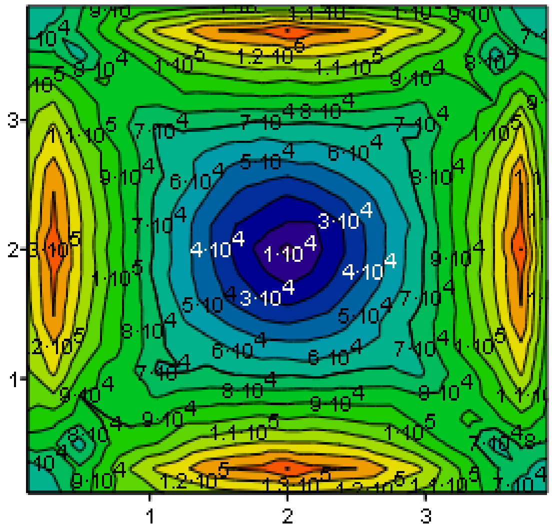
Дотичні напруження

$$\tau_{xy} := \left(\tau_{el}^{T}\right)^{\langle 0\rangle} \qquad \tau_{xz} := \left(\tau_{el}^{T}\right)^{\langle 1\rangle} \qquad \tau_{\Sigma} := \sqrt{\left(\tau_{xy}^{2} + \tau_{xz}^{2}\right)}$$



(MX, MY, τ_{Σ})

Поверхня сумарних дотичних напружень



(MX, MY, τ_{Σ})

Контурний графік сумарних напружень

Таблиця значень сумарних дотичних напружень Н/см**2

$\tau_{\Sigma}{}^{T} =$

	0	1	2	3	4	5
0	61983.967	61983.967	61950.121	62020.201	61945.841	61945.841

11.3 Використання ізопараметричних елементів

При розрахунках областей, що мають криволінійні границі, для задовільного геометричного моделювання цих областей необхідно використати велику кількість елементів з прямолінійними сторонами або плоскими гранями.

Якщо скористатись криволінійними елементами, то кількість їх можна значно зменшити, що, в свою чергу, зменшить кількість невідомих у задачі. Для побудови таких елементів використовують відображення простих елементів, віднесених до локальної системи координат, у більш складні, віднесені до загальної (глобальної) системи. Прикладом такого відображення може бути зв'язок між полярними і декартовими координатами

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \tag{9.1}$$

яке приводить прямокутник у площині r, ϑ в елемент площини x, y (рисунок 9.1).

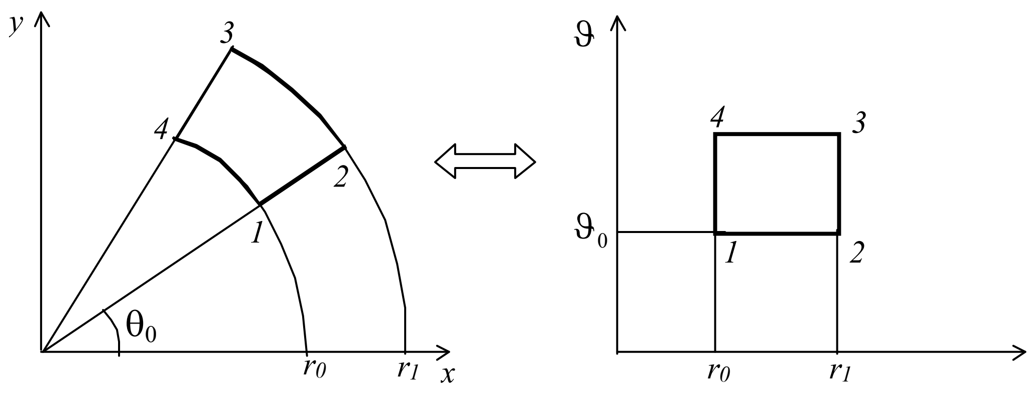


Рисунок 9.1 – Зв'язок між прямокутною і полярною системами координат (відображення квадрата у полярну систему координат)

Довільне відображення (рисунок 9.2) описується деякою функціональною залежністю між двома системами координат, яка у загальному вигляді може бути записана як

$$x = f_1(\xi, \eta), \quad y = f_2(\xi, \eta). \tag{9.2}$$

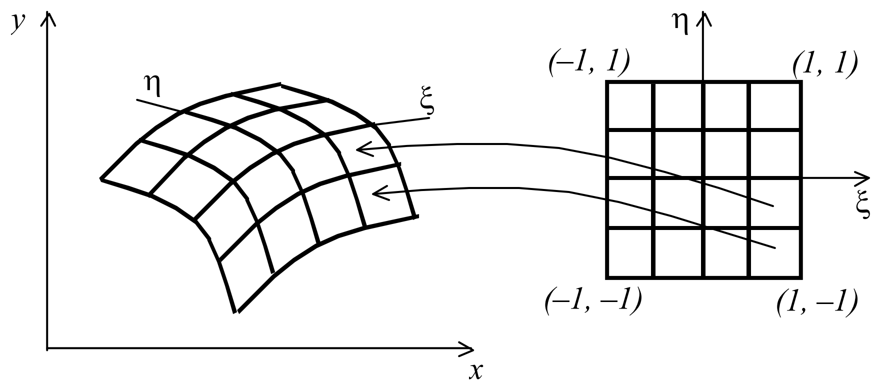


Рисунок 9.2 – Схема довільного відображення

Якщо вибрано координатний вид відображення, і для кожного елемента координати підібрано так, що відбувається їх відображення в області, які мають спільну межу, то базисні функції, записані у локальній області (ξ, η) елемента, можуть бути використані для описання змін функції на елементі у глобальній області (x, y) без порушення між елементами вимог неперервності.

Хоча існують різні варіанти побудови криволінійних елементів, спосіб, який використовує відображення елементів, є найпоширенішим.

Відображення з локальної системи координат ξ, η у декартову x, y реалізується за допомогою співвідношень

$$x = \mathbf{N}\mathbf{X}, \quad y = \mathbf{N}\mathbf{Y}, \tag{9.3}$$

де $\mathbf{N}(\xi, \eta)$ – інтерполяційні функції, визначені у локальній системі координат, причому кожна з координат змінюється від $+1$ до -1;

$\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ – матриці координат вузлів елемента у глобальній системі координат;

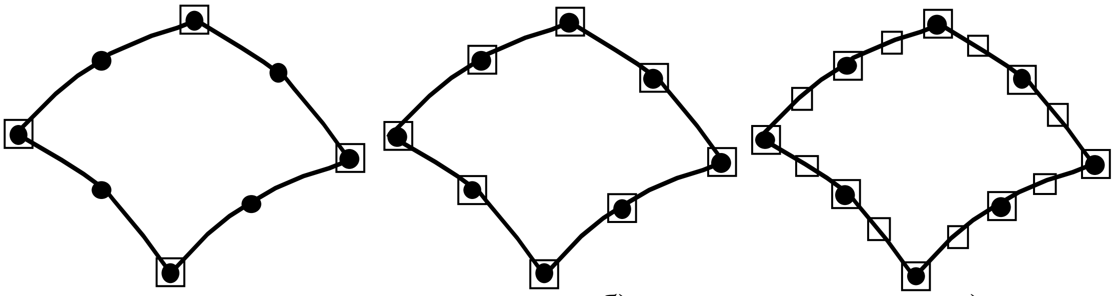
x, y – декартові координати.

Використаємо інтерполяційні функції $\mathbf{N}$ для того, щоб записати переміщення у точках елемента

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\,\overline{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{N}\,\overline{\mathbf{v}}, \tag{9.4}$$

де $\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}}$ – переміщення вузлових точок.

Елементи, для яких перетворення координат і переміщень проводиться за допомогою одних і тих же інтерполяційних функцій, називають ізопараметричними (рисунок 9.3,б).



а) б) в)

Рисунок 9.3 – Суперпараметричний а), ізопараметричний б) і субпараметричний в) елементи

Якщо кількість вузлових точок для відображення геометрії (координат $\mathbf{x}, \mathbf{y}$) і розшукуваних функцій $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ різна, елементи називають суперпараметричними (якщо розмірність векторів $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ більша, ніж $\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}}$) або субпараметричними (якщо, навпаки, кількість вузлових значень функцій більша, ніж кількість вузлових значень координат) (рисунок 9.3,в).

До функцій форми, записаних у локальних координатах, ставиться ряд вимог, які забезпечують неперервність функцій на границях елементів і, відповідно, збіжність результатів розрахунку до точних при зменшенні розмірів скінченних елементів.

В основному, вони співпадають з вимогами до вибору інтерполяційних функцій у глобальній системі [6].

9.1 Плоскі скінченні елементи

Розглянемо чотирикутники двох видів: з прямолінійними сторонами (рисунок 9.4,а) і параболічними (рисунок 9.4,б).

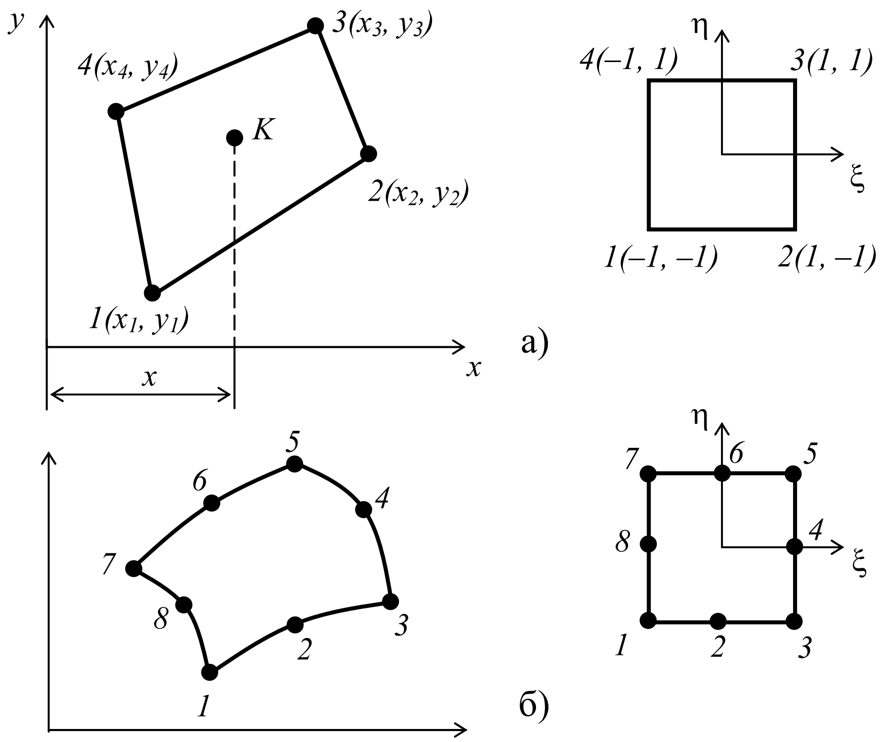


Рисунок 9.4 – Плоскі скінченні елементи: а) з прямолінійними сторонами; б) з параболічними сторонами

Функції, що відображають квадрат на чотирикутник з прямолінійними кромками, мають вигляд

$$
\begin{gathered}
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}\mathbf{Y}, \\
\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix}^T, \\
N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \\
N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \quad N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta).
\end{gathered}
\tag{9.5}
$$

Для елемента з криволінійними сторонами

$$
\begin{gathered}
x = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_8 \end{bmatrix}\mathbf{X}, \quad y = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_8 \end{bmatrix}\mathbf{Y}, \\
\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_8 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_8 \end{bmatrix}^T.
\end{gathered}
\tag{9.6}
$$

Інтерполяційні функції

$$N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta+1),\quad N_2=\frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1-\eta),$$
$$N_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1),\quad N_4=\frac{1}{2}\left(1-\eta^2\right)(1+\xi),$$
$$N_5=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1),\quad N_6=\frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1+\eta),\tag{9.7}$$
$$N_7=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(\xi-\eta+1),\quad N_8=\frac{1}{2}\left(1-\eta^2\right)(1-\xi)$$

Залежності (9.5), (9.6) ставлять у відповідність кожній точці $K(\xi,\eta)$ у квадраті справа точку $K(x,y)$, розміщену в чотирикутнику зліва (рисунок 9.2). При цьому кутові точки квадрата переходять у кутові точки прямокутника.

Розглянемо процес побудови матриць жорсткості для елемента, зображеного на рисунку 9.4,б.

Вважаємо, що переміщення апроксимуються за допомогою тих же локальних функцій, що і координати

$$u=[N_1\quad N_2\quad \ldots\quad N_8]\overline{\mathbf{u}},\quad v=[N_1\quad N_2\quad \ldots\quad N_8]\overline{\mathbf{v}},\tag{9.8}$$

де

$$\overline{\mathbf{u}}=[u_1\quad u_2\quad \ldots\quad u_8]^T,\quad \overline{\mathbf{v}}=[v_1\quad v_2\quad \ldots\quad v_8]^T.$$

Деформації для плоскої задачі визначаються через переміщення формулами

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x}\end{bmatrix}=\mathbf{B}\mathbf{q},\tag{9.9}$$

де $$\mathbf{B}=[\mathbf{B}_1\quad \mathbf{B}_2\quad \ldots\quad \mathbf{B}_8],\quad \mathbf{B}_i=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q}=\{u_1\quad v_1\quad u_2\quad v_2\quad \ldots\quad u_8\quad v_8\}^T.\tag{9.10}$$

Щоб визначити похідні $\frac{\partial N_i}{\partial x},\frac{\partial N_i}{\partial y}$ необхідно записати їх через похідні по ξ,η, оскільки функції N_i залежать саме від ξ,η.

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}, \tag{9.11}$$

або у матричній формі

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{I} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}, \tag{9.12}$$

де $\mathbf{I}$ – матриця Якобі

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \dfrac{\partial N_8}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial \eta} & \dfrac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \dfrac{\partial N_8}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 \end{bmatrix}. \tag{9.13}$$

З виразу (9.12) маємо

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{I}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}, \tag{9.14}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{I}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{I}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}.$$

Підставляючи (9.14) у (9.10), одержимо

$$B_i = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{I}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{I}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{I}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{I}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \end{bmatrix} \tag{9.15}$$

Для одержання матриці жорсткості використаємо формулу

$$\mathbf{K} = h\iint_S \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}\, dxdy = h\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} det\mathbf{I}\, d\xi d\eta\,. \qquad (9.16)$$

Інтеграл обчислюється чисельним способом. Розрахункова формула має вигляд

$$\mathbf{K} = h\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} H_i H_j \mathbf{f}(\xi_i, \eta_j), \qquad (9.17)$$

де $\mathbf{f}(\xi_i, \eta_j)$ – значення підінтегрального виразу для точки $\xi = \xi_i, \quad \eta = \eta_j$;

H_i, H_j – вагові коефіцієнти, які залежать від способу обчислення інтеграла [6].

Для досягнення необхідної точності інтегрування треба вибрати кількість точок інтегрування у відповідності з формою елемента.

На рисунку 9.5 показано розміщення точок інтегрування в елементі для а) двохточкового правила інтегрування, б) трьохточкового і в) чотирьохточкового.

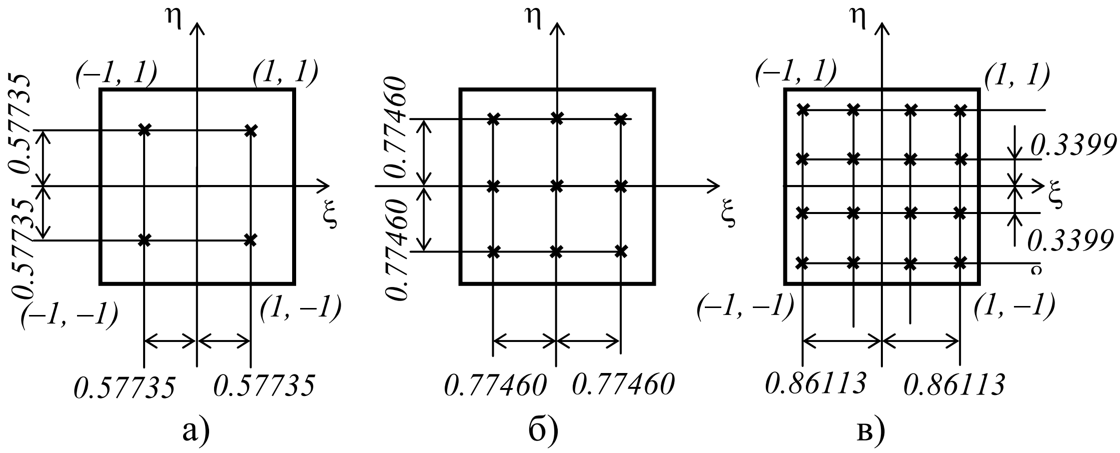


Рисунок 9.5 – Розміщення точок інтегрування

Для прямокутних елементів при чисельному інтегруванні доцільно скористатись формулою Гауса, яка має вигляд

$$\int_{-1}^{1} \mathbf{f}(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^{\eta} H_j\, \mathbf{f}(\xi_j), \qquad (9.18)$$

де для $n = 2$ $\xi_1 = \pm 0.57735, \quad H_1 = 1.0000, \quad H_2 = 1.0000$,

для $n = 3$ $\quad \xi_1 = -0.774596, \quad H_1 = 0.5555, \quad H_1 = \frac{5}{9}$,

$\xi_2 = 0, \qquad H_2 = 0.8888, \quad H_2 = \frac{8}{9}$,

$\xi_2 = 0.774596, \quad H_3 = 0.5555, \quad H_2 = \frac{5}{9}$, для $n=4$ $\quad \xi_4=-\xi_1=0.86113631, \quad H_4=H_1=0.86113631,$

$$\xi_3=-\xi_2=0.33998104, \quad H_2=H_3=0.32607258.$$

Наведемо приклад обчислення подвійного інтеграла для $n=3$

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)d\xi d\eta=\int_{-1}^{1} d\eta \int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)d\xi. \tag{9.19}$$

Застосуємо формулу Гауса для обчислення зовнішнього інтеграла

$$I=\frac{5}{9}\int_{-1}^{1} f(\xi \ ,-\eta_1)d\xi+\frac{8}{9}\int_{-1}^{1} f(\xi,0)d\xi+\frac{5}{9}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta_1)d\xi,$$

де $\quad |\xi_1|=|\eta_1|=0.77469667.$

Обчислюємо далі внутрішні інтеграли

$$I=\frac{5}{9}\left[\frac{5}{9}f(-\xi_1,-\eta_1)+\frac{8}{9}f(0,-\eta_1)+\frac{5}{9}f(\xi_1,-\eta_1)\right]+$$
$$+\frac{8}{9}\left[\frac{5}{9}f(-\xi_1,0)+\frac{8}{9}f(0,0)+\frac{5}{9}f(\xi_1,0)\right]+$$
$$+\frac{5}{9}\left[\frac{5}{9}f(-\xi_1,\eta_1)+\frac{8}{9}f(0,\eta_1)+\frac{5}{9}f(\xi_1,\eta_1)\right].$$

Якщо інтервалом інтегрування є відрізок $a \le x \le b$, координати точок інтегрування у (9.18) обчислюються за формулою

$$\frac{(b-a)\xi_i+b+a}{2},$$

а перед інтегралом вводиться множник $\dfrac{b-a}{2}$.

Вузлові сили для ізопараметричного елемента обчислюються за формулою

$$\mathbf{F}=\int_S \mathbf{N}_S{}^T \mathbf{p}_S \, dS, \tag{9.20}$$

де $\quad \mathbf{N}_S$ – матриці функцій форми для відповідної сторони елемента (наприклад, $\eta=1$), $\mathbf{p}_S=\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix}$ – компоненти поверхневих сил, направлених у напрямку осей x і y.

Диференціал dS у локальній системі координат ξ,η знаходимо так:

$dS=h\cdot dl$, де dl – диференціал довжини

$$dl=\left[\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dr\,.$$

Похідні $\frac{dx}{d\xi}$, $\frac{dy}{d\xi}$ були визначені раніше.

При чисельному інтегруванні [2, с.122]

$$\mathbf{F} = h\sum_{i}^{n} H_i \mathbf{N}_{S_i}{}^T \mathbf{p}_{S_i},$$

(h – товщина елемента, i – точки інтегрування).

Нагадаємо що усі величини під знаком суми обчислюються у точках, що залежать від H_i. Інтегрування проводиться по одній координаті ξ, оскільки $\eta = 1$.

Застосування ізопараметричних елементів у об'ємних задачах

Наведемо коротко основні залежності, що використовуються при побудові матриць жорсткості ізопараметричних елементів для осесиметричних і об'ємних тіл [6, 35].

Напруження і деформації в осесиметричному тілі зображені на рисунку 9.6.

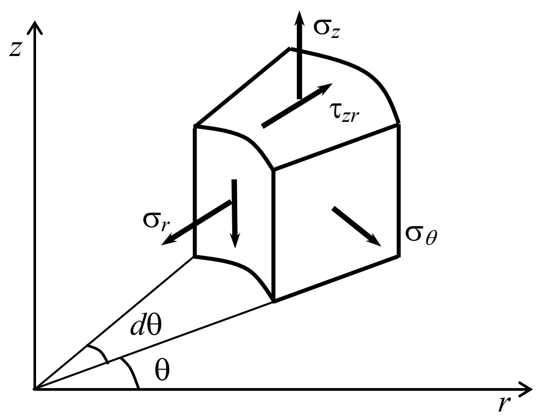


Рисунок 9.6 – Напруження і деформації в осесиметричному тілі

Залежність між деформаціями і переміщеннями для осесиметричної задачі

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{u}{r} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial r} \end{Bmatrix}. \tag{9.21}$$

Для апроксимації переміщень у перерізі кільцевого елемента використовуються наведені вище функції апроксимації для плоского елемента

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}. \tag{9.22}$$

Деформації

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q} = [\mathbf{B_1} \quad \mathbf{B_2} \quad \dots \quad \mathbf{B_n}]\mathbf{q}, \tag{9.23}$$

де

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial r} & 0 & \dfrac{N_i}{r} & \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix}. \tag{9.24}$$

Напруження пов'язані з деформаціями такою залежністю

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_r \quad \sigma_z \quad \sigma_\theta \quad \tau_{rz}\}^T, \tag{9.25}$$

$$\mathbf{D} = a_1 \begin{bmatrix} 1 & a_2 & a_2 & 0 \\ a_2 & 1 & a_2 & 0 \\ a_2 & a_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}, \tag{9.26}$$

$$a_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad a_2 = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad a_3 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}.$$

Матриці жорсткості визначаються інтегралом

$$\mathbf{K} = 2\pi \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}\, R det\, \mathbf{I}\, d\xi\, d\eta. \tag{9.27}$$

У даному випадку

$$dV = 2\pi R\, det\, \mathbf{I}\, d\xi\, d\eta. \tag{9.28}$$

Для розв'язку осесиметричних задач може бути використаний ізопараметричний 8-вузловий елемент, розглянутий вище.

Розглянемо ізопараметричні елементи, які можуть бути використані при розрахунках об'ємного напруженого стану. Найбільш часто використовуються 8-вузловий і 20-вузловий елементи (рисунок 9.7).

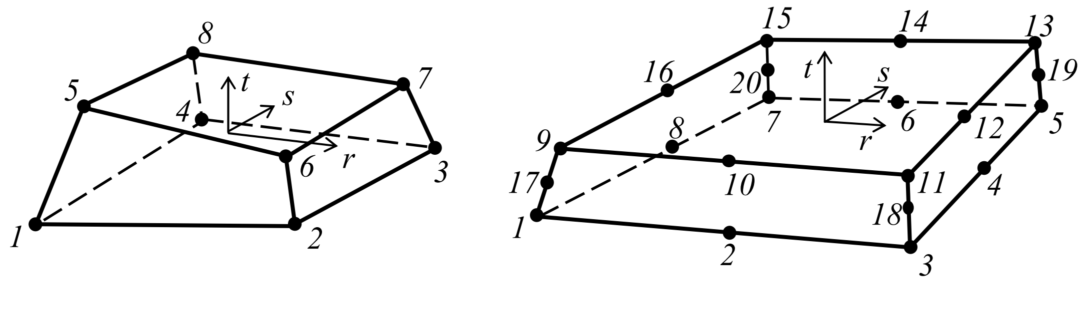


Рисунок 9.7 – 8-вузловий і 20-вузловий ізопараметричні елементи

Поле переміщень для ізопараметричних об'ємних елементів приймається у вигляді

$$u=\sum_{i=1}^{n} N_i u_i, \quad v=\sum_{i=1}^{n} N_i v_i, \quad w=\sum_{i=1}^{n} N_i w_i,$$

u_i, v_i, w_i – вузлові переміщення;

n – кількість вузлів;

N_i – функції форми скінченного елемента.

Функції форми для 8-вузлового елемента [2]

$$N_1=\frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t), \quad N_2=\frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t),$$

$$N_3=\frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t), \quad N_4=\frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t),$$

$$N_5=\frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t), \quad N_6=\frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t),$$

$$N_7=\frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t), \quad N_8=\frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t).$$

Для 20-вузлового елемента

$$N_1=\frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t)(-r-s-t-2), \quad N_2=\frac{1}{4}\left(1-r^2\right)(1-s)(1-t),$$

$$N_3=\frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t)(r-s-t-2), \quad N_4=\frac{1}{4}\left(1-s^2\right)(1+r)(1-t),$$

$$N_5=\frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t)(r+s-t-2), \quad N_6=\frac{1}{4}\left(1-r^2\right)(1+s)(1-t),$$

$$N_7=\frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t)(-r+s-t-2), \quad N_8=\frac{1}{4}\left(1-s^2\right)(1-r)(1-t),$$

$$N_9=\frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t)(-r-s+t-2), \quad N_{10}=\frac{1}{4}\left(1-r^2\right)(1-s)(1+t),$$

$$N_{11}=\frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t)(r-s+t-2), \quad N_{12}=\frac{1}{4}\left(1-s^2\right)(1+r)(1+t),$$

$$N_{13}=\frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t)(r+s+t-2), \quad N_{14}=\frac{1}{4}\left(1-r^2\right)(1+s)(1+t),$$

$$N_{15}=\frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t)(-r+s+t-2), \quad N_{16}=\frac{1}{4}\left(1-s^2\right)(1-r)(1+t),$$

$$N_{17}=\frac{1}{4}\left(1-t^2\right)(1-r)(1-s), \quad N_{18}=\frac{1}{4}\left(1-t^2\right)(1+r)(1+s),$$

$$N_{19}=\frac{1}{4}\left(1-t^2\right)(1+r)(1+s), \quad N_{20}=\frac{1}{4}\left(1-t^2\right)(1-r)(1+s).$$

Матриці жорсткості аналогічно попередньому визначаються інтегралами

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B}\, R det\,\mathbf{I}\, dr\, ds\, dt\,,$$

де

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{B}_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}^T.$$

Матриця пружних модулів для ізотропного матеріалу

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix},$$

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = 2G + \lambda,$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G,$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \lambda,$$

$$\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Вектор вузлових сил, обумовлених поверхневим навантаженням, направленим по нормалі до кожної грані

$$\mathbf{F} = 2\pi \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{N}_S{}^T \mathbf{p}\, det\,\mathbf{I}_S\, dr\, ds\,,$$

$\mathbf{N}_S$ – двовимірні функції форми у локальній системі для кожної грані скінченного елемента;

$\mathbf{I}_S$ – матриця Якобі для відповідної грані.

Чисельне інтегрування

Важливим аспектом використання ізопараметричних елементів є обчислення інтегралів. Складність підінтегральних змушує звернутися до наближених методів або чисельного інтегрування. Почнемо розгляд існуючих підходів до чисельного інтегрування з простих одновимірних прикладів.

Нехай $y = f(x)$ – неперервна функція в інтервалі $[a,b]$. Визначений інтеграл $J = \int_a^b f(x)dx$ обчислює площу, обмежену функцією $f(x)$, віссю x і ординатами $x_a = a, x_b = b$. Розіб'ємо інтервал інтегрування $[a,b]$ на n рівних частин $h = \dfrac{(b-a)}{n}$ (рисунок 9.8).

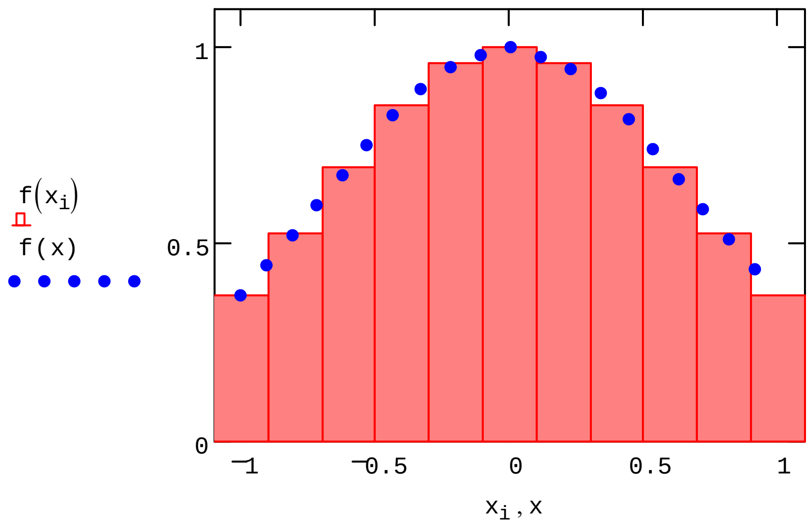


Рисунок 9.8 – Ілюстрація методу прямокутників

Площу на одній з ділянок $[x_i, x_{i+1}]$ наближено можна визначити як площу прямокутника з висотою $f(\frac{x_{i+1}+x_i}{2})$ і шириною h. Загальна площа є сумою площ окремих прямокутників. Наближена формула для визначення інтеграла має вигляд $J = \sum_{i=1}^{n} h[f(a+hi+h/2)]$ (a – початок інтервалу). Якщо замість прямокутників площу розглядати як суму трапецій $J_i = \frac{1}{2}(f(x_i)+f(x_{i+1}))$, загальна площа дорівнюватиме сумі площ окремих трапецій

$$J = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0)+2f(x_1)+...+2f(x_{n-1})+f(x_n)).$$

Наближена формула –

$$J=\sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}[f(a+hi)+f(a+h(i-1))].$$

Похибку обчислень оцінюють за формулою

$$|\Delta|=\frac{(b-a)^3}{12n^2}M,\ M=\max|f''(x)|_{a\le x\le b}.$$

Збільшення точності можна досягнути, використавши для апроксимації підінтегральної функції поліном другого ступеня (метод Сімпсона). У цьому методі Інтервал $[a,b]$ розбивається на парне число 2n рівних частин довжиною $h=\frac{(b-a)}{2n}$.

Через три послідовні ординати проводять квадратну параболу і обчислюють площу під параболою. Загальна площа обчислюється сумою окремих площ. Відповідна наближена формула –

$$J=\frac{h}{3}[y_0+4(y_1+y_3+...+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+...+y_{2n-2})+y_{2n}],$$

$$x_k=a+kh\quad y_k=f(x_k),k=0,1,2,...,2n.$$

Похибка методу –

$$|\Delta|=\frac{(b-a)^5}{180\cdot 2n^4}$$

Метод Сімпсона широко використовується. Його можна уточнити використавши для апроксимуючій функції кубічну параболу (метод Сімпсона 3/8), а також параболою 4-го степеня (метод Буля).

Точність методу Сімпсона суттєво перевищує точність методів трапецій і прямокутників.

Наведені вище методи є частинними випадками формул Ньютона-Котеса, які використовують розділення інтервалу інтегрування на рівні проміжки.

Більш ефективними є методи Гауса, в яких вибираються і координати вузлових точок, і вагові коефіцієнти

$$\int_a^b f(x)dx=\alpha_1F(x_1)+\alpha_2F(x_2)+...+\alpha_nF(x_n)+R_n$$

(α_i – вагові коефіцієнти, $f(x_i)$– значення функцій у вузлах інтегрування. Невідомими тут є α_i і x_i ($2n$-невідомих). Сутність формул Гауса полягає у тому, що при заданій кількості інтервалів необхідно розмістити вузли так, щоб одержати найвищу точність інтегрування.

Коефіцієнти α_i і положення вузлів x_i вибираються такими, щоб формула була точною для многочленів степеня $N\le 2n-1$ при n вузлах.

Такі вузли є коренями многочлена Лежандра

$$P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(t^2-1)^n}{dt^n},$$

а коефіцієнти α_i обчислюються за формулою

$$\alpha_i = \frac{2}{(1-t_i^2)(P_n'(t_i))^2}, (i = 1, 2, ..., n).$$

При обчисленні інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ відрізок $[a,b]$ перетворюється у відрізок $[-1,1]$ шляхом заміни $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$.

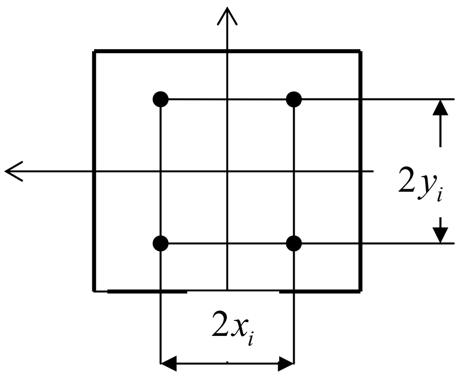
Формула Гауса-Лежандра матиме вигляд

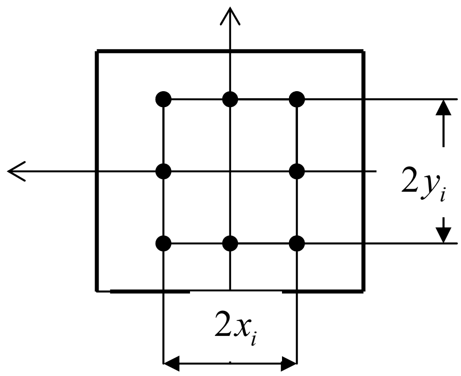
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) + R_n^*,$$

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t;\ R_n^* = (\frac{b-a}{2})^{2n+1} R_n;$$

$$R_n = \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!}(\frac{(n)^2}{(2n)!})^2 f^{(2n)}(t), t \in [-1,1].$$

Деякі з координат вузлів і відповідні вагові коефіцієнти для формули Гауса – Лежандра наведені на рис 9.9.





$r_i = x_i = y_i = \pm 0.577350269189626$

$\alpha_i = 2.000000000000000$

$x_5 = x_7 = y_6 = y_8 = 0.00000$

$\alpha_5 = \alpha_7 = \alpha_6 = \alpha_8 = 2.00000$

$x_2 = x_3 = y_3 = y_4 = 0.77459$

$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_1 = \alpha_4 = 0.55555$

$x_2 = -x_1 = -x_4,$

$y_3 = -y_1 = -y_2.$

Рис. 9.9

Для обчислення двох і тривимірних інтегралів застосовується звична послідовність – спочатку обчислюється внутрішній інтеграл, потім наступний і т.д. Зокрема, для двовимірного інтеграла матимемо

$$\int F(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int F(x_i, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j F(x_i, y_j).$$

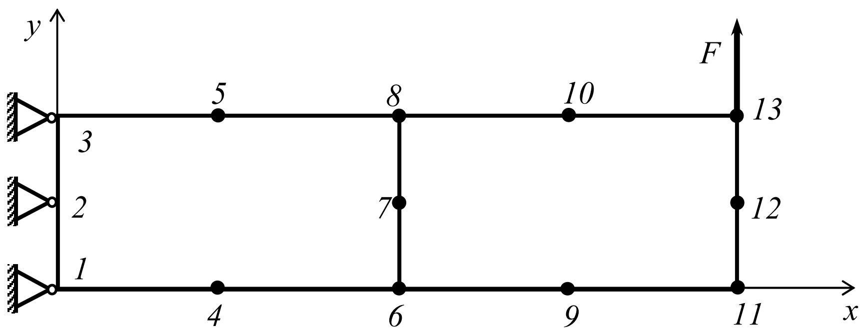
Для тривимірного інтеграла –

$$\int F(x,y,z)dxdydz = \sum_{i,j,k=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \alpha_k F(x_i, y_j, z_k).$$

Деякі значення α_i наведені нижче.

Положення вузлів і значення вагових коефіцієнтів залежать від інтервалу $[a,b]$. Якщо x_i - координата вузла і α_i ваговий коефіцієнт для інтервалу – 1 до 1, то відповідні значення для інтервалу $[a,b]$ приймуть вигляд $\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}x_i, \frac{b-a}{2}\alpha_i$. Для ізопараметричних елементів найменша похибка у визначенні переміщень буде в точках інтегрування.

Приклад 11.1 Визначити переміщення для пластини, навантаженої у її площині.



Координати вузлів

$$Nodes := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 6 & 6 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0.5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}$$

Топологічна матриця

$$Top := \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 4 & 6 & 7 \\ 6 & 9 & 11 & 12 & 13 & 10 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$nel := rows(Top) \quad nel = 2 \quad ie := (1..nel)$

$nnd := cols(Top) \quad nnd = 8 \quad j := (1..nnd)$

$$\begin{pmatrix} Xn_{j,ie} \\ Yn_{j,ie} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} Nodes_{1,(Top_{ie,j})} \\ Nodes_{2,(Top_{ie,j})} \end{bmatrix}$$

Матриці функцій апроксимації та їх похідні

$$N(r,s) := \frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix} -(-1+r)\cdot(-1+s)\cdot(r+s+1) \\ 2\cdot\left(-1+r^2\right)\cdot(-1+s) \\ (1+r)\cdot(-1+s)\cdot(-r+s+1) \\ -2\cdot(1+r)\cdot\left(-1+s^2\right) \\ (1+r)\cdot(1+s)\cdot(r+s-1) \\ -2\cdot\left(-1+r^2\right)\cdot(1+s) \\ -(-1+r)\cdot(1+s)\cdot(-r+s-1) \\ 2\cdot(-1+r)\cdot\left(-1+s^2\right) \end{bmatrix}$$

$$dNds(r,s) := \frac{d}{ds}N(r,s) \qquad dNdr(r,s) := \frac{d}{dr}N(r,s)$$

Параметризація координат

$$x(r,s,Xn) := N(r,s)^T\cdot Xn \qquad y(r,s,Yn) := N(r,s)^T\cdot Yn$$

Матриця Якобі

$$dN1(r,s) := dNdr(r,s)^T \quad dN2(r,s) := dNds(r,s)^T \quad v := (1..8)$$

$$J(r,s,ie) := \begin{bmatrix} \sum_v dNdr(r,s)_v\cdot\left(Xn^{\langle ie\rangle}\right)_v & \sum_v dNdr(r,s)_v\cdot\left(Yn^{\langle ie\rangle}\right)_v \\ \sum_v dNds(r,s)_v\cdot\left(Xn^{\langle ie\rangle}\right)_v & \sum_v dNds(r,s)_v\cdot\left(Yn^{\langle ie\rangle}\right)_v \end{bmatrix}$$

Визначник матриці Якобі

$$detJ(r,s,ie) := \left|J(r,s,ie)\right|$$

Обернена матриця Якобі

$$JJ(r,s,ie) := J(r,s,ie)^{-1}$$

Похідні у глобальних координатах

$$dNdx(r,s,ie) := \left(JJ(r,s,ie)_{1,1}\cdot dNdr(r,s) + JJ(r,s,ie)_{1,2}\cdot dNds(r,s)\right)$$

$$dNdy(r,s,ie) := \left(JJ(r,s,ie)_{2,1}\cdot dNdr(r,s) + JJ(r,s,ie)_{2,2}\cdot dNds(r,s)\right)$$

$$Nul_8 := 0 \qquad dN3(r,s,ie) := dNdx(r,s,ie)^T \qquad dN4(r,s,ie) := dNdy(r,s,ie)^T$$

$$B1(r,s,ie) := augment\left(dN3(r,s,ie), Nul^{T}\right) \qquad B2(r,s,ie) := augment\left(Nul^{T}, dN4(r,s,ie)\right)$$

$$B3(r,s,ie) := augment(dN4(r,s,ie), dN3(r,s,ie))$$

$$BT(r,s,ie) := augment\left(augment\left(B1(r,s,ie)^{T}, B2(r,s,ie)^{T}\right), B3(r,s,ie)^{T}\right)$$

$$B(r,s,ie) := BT(r,s,ie)^{T}$$

$E := 2\cdot 10^{4} \qquad \mu := 0.3 \qquad h := 0.2$

Матриця модулів пружності

$$D := E\cdot\frac{h}{1-\mu^{2}}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix}$$

Матриця індексів

$$mi_{ie,j} := \left(2\cdot Top_{ie,j} - 1\right) \qquad mi_{ie,j+8} := 2\cdot Top_{ie,j}$$

$$mi = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 5 & 3 & 1 & 7 & 11 & 13 & 16 & 10 & 6 & 4 & 2 & 8 & 12 & 14 \\ 11 & 17 & 21 & 23 & 25 & 19 & 15 & 13 & 12 & 18 & 22 & 24 & 26 & 20 & 16 & 14 \end{pmatrix}$$

Обчислення матриці жорсткості елемента

$$M1(r,s,ie) := BT(r,s,ie)\cdot D \qquad M2(r,s,ie) := M1(r,s,ie)\cdot B(r,s,ie)$$

$$M3(r,s,ie) := M2(r,s,ie)\cdot detJ(r,s,ie)$$

$r1 := 0.774597 \qquad r2 := 0 \qquad r3 := -0.774597$

$s1 := 0.774597 \qquad s2 := 0 \qquad s3 := r3$

$a1 := 0.5555555555556 \qquad a3 := 0.555555555556 \qquad a2 := 0.888888888889$

$$Kel(ie) := \begin{pmatrix} a1\cdot a1\cdot M3(r1,s1,ie) + a1\cdot a2\cdot M3(r1,s2,ie) + a2\cdot a1\cdot M3(r2,s1,ie)\ \ldots \\ + a2\cdot a2\cdot M3(r2,s2,ie) + a1\cdot a3\cdot M3(r1,s3,ie) + a1\cdot a3\cdot M3(r3,s1,ie)\ \ldots \\ + a2\cdot a3\cdot M3(r2,s3,ie) + a2\cdot a3\cdot M3(r3,s2,ie)\ \ldots \\ + a3\cdot a3\cdot M3(r3,s3,ie) \end{pmatrix}$$

Матриця жорсткості системи елементів

$q := (1..16) \quad p := (1..16)$

$KK_{(26,26)} := 0$

$KK_{\left(mi_{ie,q}, mi_{ie,p}\right)} := \left[KK_{\left(mi_{ie,q}, mi_{ie,p}\right)} + Kel(ie)_{q,p}\right]$

$K := \mathrm{submatrix}(KK, 7, 26, 7, 26)$

$F_{20} := 10$

Переміщення вузлів $\quad U := K^{-1} \cdot F$

$$U = \begin{pmatrix} 0.011 \\ 0.024 \\ -0.011 \\ 0.024 \\ 0.021 \\ 0.091 \\ -3.585 \times 10^{-6} \\ 0.091 \\ -0.021 \\ 0.091 \\ 0.026 \\ 0.188 \\ -0.026 \\ 0.188 \\ 0.029 \\ 0.301 \\ -1.769 \times 10^{-5} \\ 0.301 \\ -0.029 \\ 0.301 \end{pmatrix}$$

Побудова сітки скінченних елементів

Розділення на елементи, тобто побудова сітки скінченних елементів є першим етапом розрахунку МСЕ. У зв'язку зі складністю конструкцій задача побудови сітки є одним з найскладніших етапів алгоритму МСЕ. Необхідність автоматизації процесу введення інформації у МСЕ обумовила появу великої кількості алгоритмів розділення на елементи. Короткий огляд методів розділення можна знайти у [14].

Зазначимо, що всі універсальні програми, які використовують МСЕ, мають у своєму складі підпрограми, які забезпечують мінімум інформації для виконання алгоритму і, зокрема, підпрограми побудови сітки скінченних елементів.

У розділі 4 наведена програма триангуляції плоскої області, основана на послідовному заповненні заданої області трикутними елементами. Більш універсальними є алгоритми, які базуються на розглянутому вище ізопараметричному перетворенні.

Область попередньо розбивають на зони, які нумерують у довільній послідовності. Від послідовності нумерації залежить ширина стрічки глобальної матриці жорсткості. Кожна зона – це квадратичний 8-вузловий чотирикутник. Для кожної зони вводять локальну систему координат $\xi O \eta$ (рисунок 9.11,а).

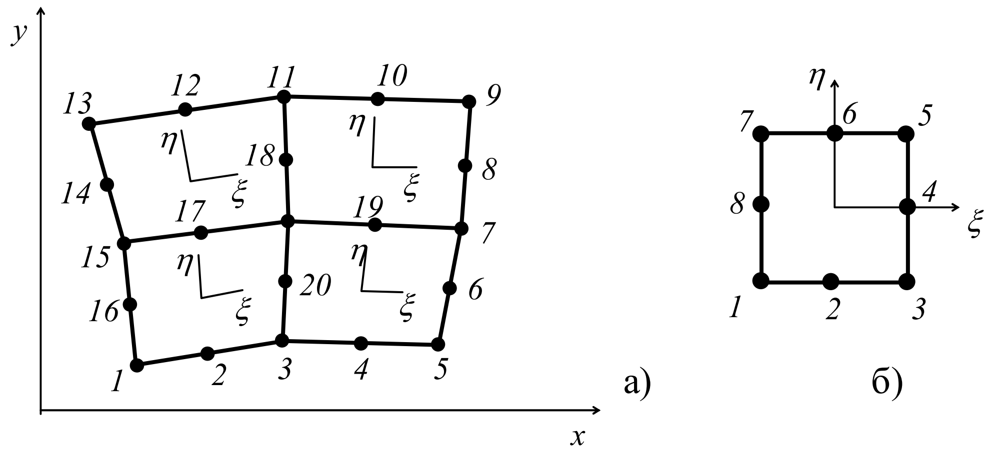


Рисунок 9.11 – Схема розділення області на зони а); елемент у локальній системі координат б)

Зона у локальній системі координат – це квадрат (рисунок 9.11,б) з вісьмома вузлами. Для розділення кожної зони на скінченні елементи спочатку таке розділення проводять на елементі у локальних координатах, розбиваючи сторони елемента на частини (як правило, однакові) $\Delta\xi$ і $\Delta\eta$. Після цього обчислюють локальні координати вузлів одержаної сітки і переходять від локальної системи координат $\xi O \eta$ до глобальної за формулами

$$x = \sum_{i=1}^{8} N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^{8} N_i y_i,$$

де x_i, y_i – глобальні координати вузлів квадратичного елемента (зони);

N_i – функції форми для плоского квадратичного елемента

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta+1), \quad N_2 = \frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1-\eta),$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1), \quad N_4 = \frac{1}{2}\left(1-\eta^2\right)(1+\xi),$$

$$N_5 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1), \quad N_6 = \frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1+\eta),$$

$$N_7 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(\xi-\eta+1), \quad N_8 = \frac{1}{2}\left(1-\eta^2\right)(1-\xi).$$

Таким чином, перетворення координат дозволяє одержати глобальні координати вузлів у кожній підобласті, які відповідають координатам прямокутної сітки у локальній системі координат (рисунок 9.12).

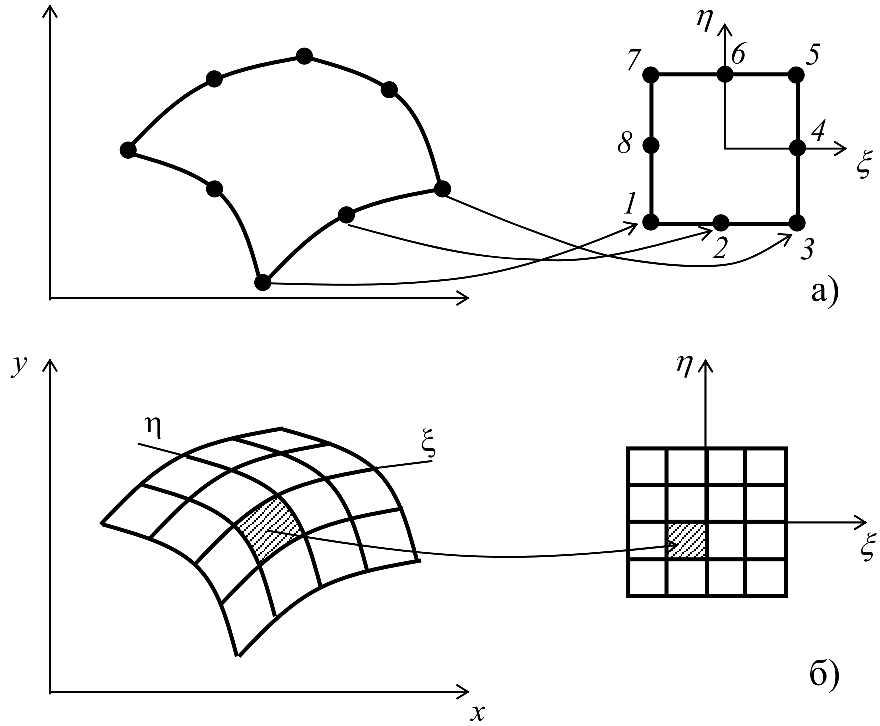
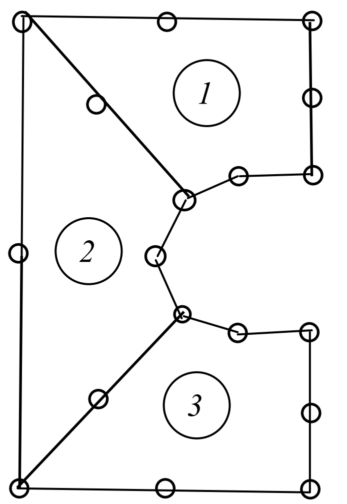


Рисунок 9.12 – Схема відображення: а) пряме; б) обернене

Важливими етапами у генерації сітки вузлів є нумерація вузлів і графічне відображення сітки. Для реалізації цих етапів розробляють спеціальні підпрограми перенумерації вузлів і візуалізації сітки.

Приклад 9.2 Використання перетворення координат для побудови сітки скінченних елементів

Вибрану область необхідно попередньо розділити на базові восьмивузлові елементи після чого задати кількість поділок на кожній з сторін цих елементів (однакову для протилежних сторін). У даному випадку використаємо рівномірне розділення (п’ять вузлів на кожній з сторін трьох восьмивузлових (базових) елементів). Взагалі, розміщення вузлових точок на кожній з сторін може біти довільним. Початкове розділення області на три восьмивузлові скінченні елементи має такий вигляд:



Матриця координат вузлів у глобальній системі координат

$$Nod := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 & 4 & 2.2 & 3 & 4 & 0 & 2 & 2.3 & 3 & 4 & 1.3 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2.4 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3.7 & 4 & 4 & 4.7 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

Топологічна матриця

$$Top := \begin{pmatrix} 18 & 17 & 16 & 14 & 11 & 12 & 13 & 15 \\ 16 & 9 & 1 & 4 & 6 & 10 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & 6 & 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$nel := rows(Top)$ $\quad nel = 3$ $\quad$ кількість елементів $\quad ie := (1..nel)$

$nnd := cols(Top)$ $\quad nnd = 8$ $\quad$ кількість вузлів у елементі $\quad j := (1..nnd)$

$$\begin{pmatrix} Xn_{j,ie} \\ Yn_{j,ie} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} Nod_{1,\left(Top_{ie,j}\right)} \\ Nod_{2,\left(Top_{ie,j}\right)} \end{bmatrix}$$

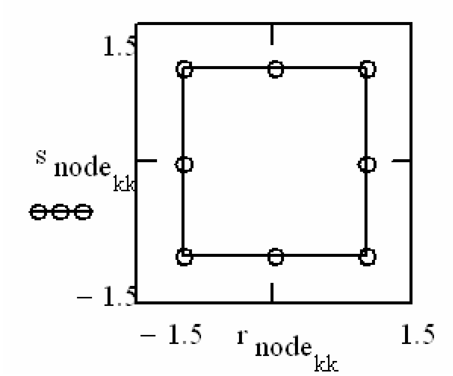
координати вузлів кожного елемента

$$N(r,s) := \frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix} -(-1+r)\cdot(-1+s)\cdot(r+s+1) \\ 2\cdot\left(-1+r^2\right)\cdot(-1+s) \\ (1+r)\cdot(-1+s)\cdot(-r+s+1) \\ -2\cdot(1+r)\cdot\left(-1+s^2\right) \\ (1+r)\cdot(1+s)\cdot(r+s-1) \\ -2\cdot\left(-1+r^2\right)\cdot(1+s) \\ -(-1+r)\cdot(1+s)\cdot(-r+s-1) \\ 2\cdot(-1+r)\cdot\left(-1+s^2\right) \end{bmatrix}$$

Матриця функцій інтерполяції

Початковий восьмивузловий скінченний елемент у локальних координатах

$s_{node} := \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$ $\quad r_{node} := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T$ $\quad kk := (1..nnd+1)$

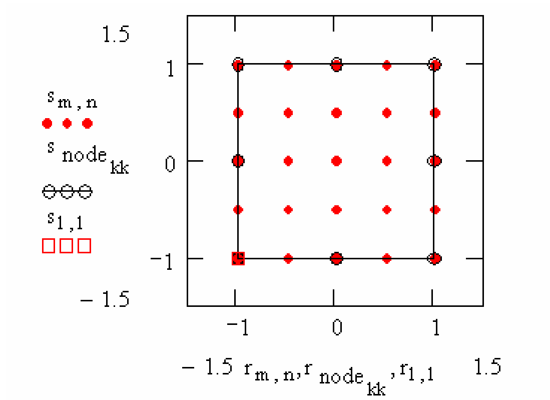


Координати вузлів у локальній системі після додаткового поділу

$$r := \begin{pmatrix} -1 & -0.5 & 0 & 0.5 & 1 \\ -1 & -0.5 & 0 & 0.5 & 1 \\ -1 & -0.5 & 0 & 0.5 & 1 \\ -1 & -0.5 & 0 & 0.5 & 1 \\ -1 & -0.5 & 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \qquad s := r^T \qquad s = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Восьмивузловий скінченний елемент у локальних координатах після поділу

$m := 1..5$ $\qquad$ $n := 1..5$



Масиви координат вузлів елементів у локальних координатах

$k := 1..\mathrm{cols}(r)$ $\qquad$ $i := 1..\mathrm{rows}(r)$

$$X_{[(ie-1)\cdot 5+i],k} := \sum_j \left[N\left(r_{i,k}, s_{i,k}\right)_j \cdot \left(Xn^{\langle ie\rangle}\right)_j \right] \qquad Y_{[(ie-1)\cdot 5+i],k} := \sum_j \left[N\left(r_{i,k}, s_{i,k}\right)_j \cdot \left(Yn^{\langle ie\rangle}\right)_j \right]$$

$\mathrm{cols}(X) = 5$ $\qquad$ $\mathrm{rows}(X) = 15$

Вузлові точки нової сітки

$x_{max} := (\max(Xn) + 2)$ $\qquad$ $x_{min} := (\min(Xn) - 2)$

$y_{max} := (\max(Yn) + 2)$ $\qquad$ $y_{min} := (\min(Yn) - 2)$

$ip := (1..\mathrm{rows}(X))$ $\qquad$ $k := (1..nnd)$

Координати вузлів у глобальній системі координат

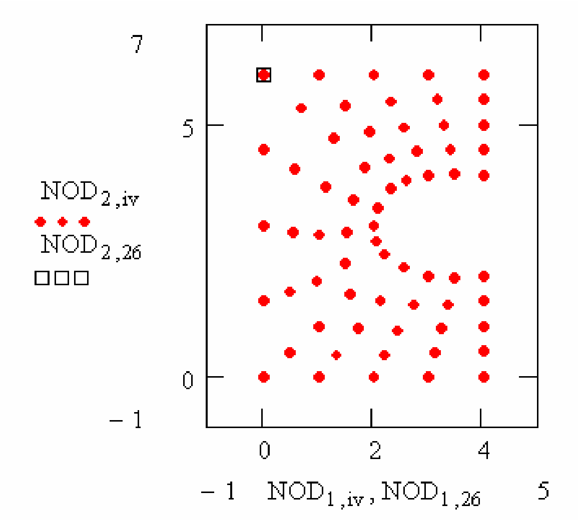
$$XV(X) := \left| \begin{array}{l} v \leftarrow \left((X)^T\right)^{\langle 1 \rangle} \\ \text{for } j \in 2..\operatorname{cols}\left(\left((X)^T\right)\right) \\ \quad v \leftarrow \operatorname{stack}\left[v, \left(X^T\right)^{\langle j \rangle}\right] \\ v^T \end{array} \right. \qquad YV(Y) := \left| \begin{array}{l} v \leftarrow \left((Y)^T\right)^{\langle 1 \rangle} \\ \text{for } j \in 2..\operatorname{cols}\left(\left((Y)^T\right)\right) \\ \quad v \leftarrow \operatorname{stack}\left[v, \left(Y^T\right)^{\langle j \rangle}\right] \\ v^T \end{array} \right.$$

$$NOD := \operatorname{stack}(XV(X), YV(Y))$$

NOD =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	3	2	1	0	4	3.144	2.306	1.488	0.688
2	6	6	6	6	6	5.5	5.481	5.444	5.388	5.313

$iv := 1..\operatorname{cols}(NOD)$ $\qquad$ $\operatorname{cols}(NOD) = 75$



Локальні координати після поділу знаходяться у масивах s i r

Топологічна матриця для елемента у локальних координатах

$$T1 := \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 7 & 2 \\ 7 & 3 & 8 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 3 \\ 4 & 9 & 10 & 4 \\ 4 & 5 & 10 & 4 \end{pmatrix} \qquad T := \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 8 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 8 & 2 \\ 3 & 9 & 8 & 3 \\ 3 & 4 & 9 & 3 \\ 4 & 10 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & 10 & 4 \end{pmatrix} \qquad T2 := \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 8 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 8 & 3 \\ 8 & 4 & 9 & 8 \\ 4 & 5 & 9 & 4 \\ 9 & 5 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

$TOP1 := stack(T, T + 5, T + 10, T + 15)$ $TOP3 := stack(T2, T2 + 5, T2 + 10, T2 + 15)$

$TOP2 := stack(T1, T1 + 5, T1 + 10, T1 + 15)$

Топологічна матриця для усіх трьох елементів

$TOP := stack(TOP1, TOP2 + 25, TOP3 + 50)$ $ies := 1..rows(TOP)$ $j := 1..cols(TOP)$

Координати вузлів трикутних елементів

$$\begin{pmatrix} XN_{j,ies} \\ YN_{j,ies} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} NOD_{1,(TOP_{ies,j})} \\ NOD_{2,(TOP_{ies,j})} \end{bmatrix}$$

$last\left(TOP^{\langle 1 \rangle}\right) = 96$

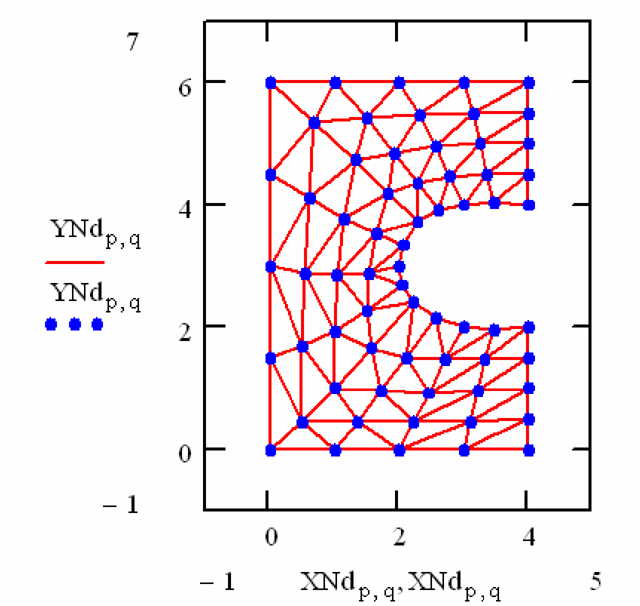
$last\left[\left(NOD^T\right)^{\langle 1 \rangle}\right] = 75$

Побудова сітки скінченних елементів

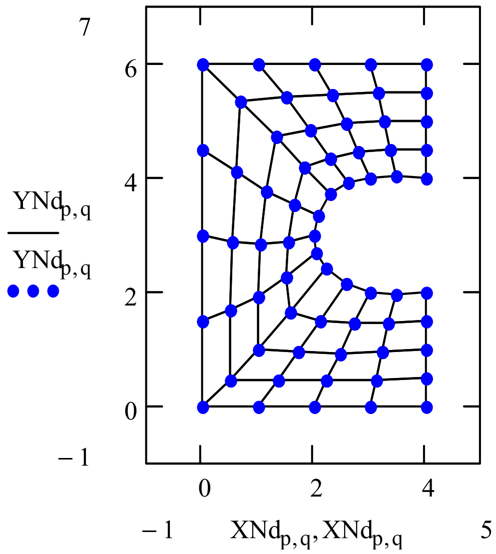
$J_{ies} := 10^6$ $JT := J^T$ $XNd := stack(XN, JT)^T$ $YNd := stack(YN, JT)^T$

$p := 1..rows(XNd)$ $rows(XNd) = 96$

$q := 1..cols(XNd)$ $cols(XNd) = 5$



Аналогічно можна побудувати сітку з чотирикутних елементів



Як видно, при використанні відображення для побудови сітки на заданій площі фігури використовується попередній поділ початкових елементів у локальній системі координат, після чого одержані точки переносяться на задану фігуру (у глобальну систему координат). Спрощення побудови сітки для деталей складної форми обумовлене порівняно простою процедурою її побудови для елементів у локальній системі координат.

Метод суперелементів

Виняткова ефективність методу скінченних елементів при моделюванні конструкцій створює ілюзію його універсальності і необмеженості можливостей. Дійсно, конструкцію довільної складності можна скласти з простіших, типових елементів, побудувавши таким чином скінченно-елементну модель. Однак, зі збільшенням кількості елементів зростають об'єми вхідної інформації, розміри матриць жорсткості і мас, що приводить часто до неможливості одержання розв'язків або у зв'язку з суттєвим збільшенням часу розв'язання задачі, або з причини недостатньої потужності обчислювальної техніки. Не на останньому місці серед труднощів, які при цьому виникають, є і збільшення похибок розв'язку систем рівнянь великої розмірності.

Усе це привело до необхідності введення різних модифікацій методу скінченних елементів, серед яких найбільш ефективною виявилась модифікація, названа методом скінченних суперелементів (МССЕ). Ідея методу така ж проста, як і ідея базового МСЕ [19]. Послідовність побудови суперелементної моделі для деякої конструкції наведена на рисунку 15.1.
Конструкцію (а) розділяють на підконструкції (б), які у свою чергу розділяються на менші (в) і т.д. до нижнього рівня, за який приймаються типові скінченні елементи з відомими матрицями жорсткості і навантажень.

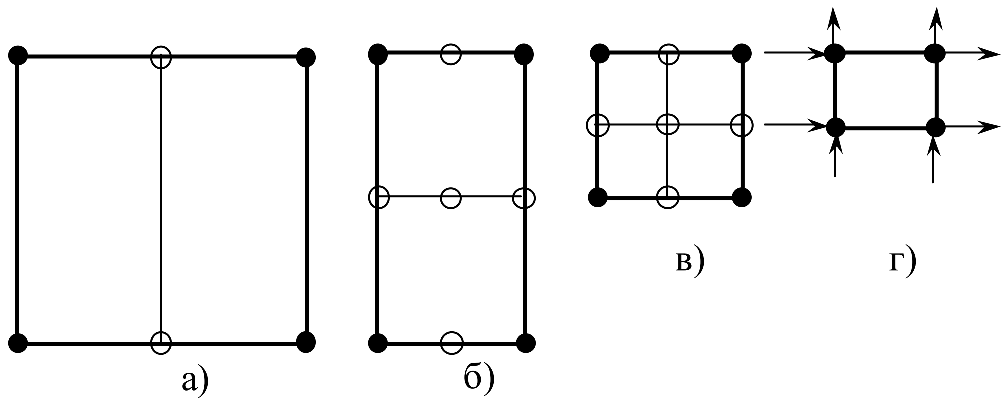


Рисунок 9.13 – Побудова суперелементної моделі: а) конструкція (4 рівень); б) суперелемент (3 рівень); в) суперелемент (2 рівень); г) скінченний елемент (1 рівень)

При розділенні на підконструкції враховують особливості форми, навантаження, структури конструкції, можливості обчислювальної техніки, яка використовується і т.п.

У загальному випадку не можна дати рецепт правильного розділення на підконструкції. Цей процес, як і побудова розрахункової схеми для довільної конструкції, є до деякої міри мистецтвом і залежить від рівня фундаментальної та інженерної підготовки фахівця.

Практика розрахунків підказує декілька рекомендацій щодо застосування методу суперелементів:

1) підконструкції на кожному етапі повинні розбиватись на типові елементи;

2) розміри підконструкцій повинні дозволяти формування і обробку матриць жорсткості на ЕОМ, які використовуються;

3) кількість рівнів визначається з порівняння трудомісткості розрахунку для декількох можливих варіантів;

4) кількість типів елементів першого рівня повинно бути якомога меншою.

Після умовного розділення конструкції на суперелементи переходять до одержання матриць жорсткості елементів на кожному з рівнів, поступово переходячи від нижніх рівнів до верхніх. При цьому враховуються умови об'єднання, які у варіанті методу переміщень зводяться до прирівнювання переміщень у спільних вузлах підконструкцій, що об'єднуються.

Тут необхідно зробити одне суттєве зауваження, яке, власне, і пояснює термін “суперелемент”. При переході від першого рівня до вищих і об'єднанні підконструкцій кількість узагальнених координат конструкції в цілому не зменшується у порівнянні з їх кількістю при безпосередньому розділенні їх на елементи нижчого рівня. У зв'язку з цим здається незрозумілим, у чому ж полягають переваги розділення на підконструкції. Основною складовою алгоритму методу суперелементів є виключення частини узагальнених координат для підконструкцій на кожному рівні. Модель підконструкції одержана після виключення деяких узагальнених координат і є, власне, суперелементом. Як правило, виключають координати, пов'язані з переміщеннями внутрішніх вузлів, залишаючи необхідну кількість вузлових переміщень для об'єднання суперелементів на наступному етапі і виконання умов закріплення, а також умов навантаження.

Розмірність матриць на кожному етапі змінюється несуттєво, але збільшується кількість операцій по визначенню їх елементів. Саме ці два фактори визначають схему розділення на підконструкції-суперелементи.

Припустимо, що на деякому етапі для підконструкції можна виділити "внутрішні" і "зовнішні" вузли і відповідні переміщення (на рисунку 9.13 "внутрішні" вузли зображені світлими, а "зовнішні" – чорними*). Тоді матрицю жорсткості, навантажень і переміщень суперелемента можна розділити на блочні матриці

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K_{rr}} & \mathbf{K_{rs}} \\ \mathbf{K_{sr}} & \mathbf{K_{ss}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q_r} \\ \mathbf{q_s} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F_r} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \tag{9.29}$$

Система рівнянь для такого елемента

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K_{rr}} & \mathbf{K_{rs}} \\ \mathbf{K_{sr}} & \mathbf{K_{ss}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q_r} \\ \mathbf{q_s} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F_r} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \tag{9.30}$$

Виключимо в (9.30) координати $\mathbf{q_s}$ ("внутрішні")

$$\left(\mathbf{K_{rr}} - \mathbf{K_{rs}} \mathbf{K_{ss}^{-1}} \mathbf{K_{sr}}\right) \mathbf{q_r} = \mathbf{F_r}, \tag{9.31}$$

або

$$\mathbf{K_p} \mathbf{q_r} = \mathbf{F_r}.$$

Одержану редуційовану матрицю $\mathbf{K_p}$ можна записати за допомогою матриці перетворень

$$\mathbf{K_p} = \mathbf{T^T} \mathbf{K} \, \mathbf{T}, \tag{9.32}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K_{ss}^{-1}} \mathbf{K_{sr}} \end{bmatrix}. \tag{9.33}$$

Для багаторівневої схеми формула (9.31) застосовується для кожного рівня. Послідовність визначення матриць жорсткості з нижнього рівня до конструкції у цілому має вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{K_p^{(1)}} &= \mathbf{T_1}^{\mathbf{T}} \mathbf{K_1} \mathbf{T_1}, \\ \mathbf{K_p^{(2)}} &= \mathbf{T_2}^{\mathbf{T}} \mathbf{K_2} \mathbf{T_2}, \\ &. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ \mathbf{K_p^{(n)}} &= \mathbf{T_n}^{\mathbf{T}} \mathbf{K_n} \mathbf{T_n}, \end{aligned} \tag{9.34}$$

---

* У дійсності "зовнішні" – це вузли, які залишаються, а "внутрішні" – які виключаються. Як видно з рисунка 9.13, "внутрішніми" можуть бути і вузли на границях елементів. Як правило, навантаження у "внутрішніх" вузлах відсутнє.

де $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, ..., \mathbf{K}_n$ – матриці жорсткості підконструкцій на кожному з рівнів синтезу;

$\mathbf{K}_\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{K}_\mathbf{p}^{2}, ..., \mathbf{K}_\mathbf{p}^{(n)}$ – редуційовані матриці жорсткості підконструкцій – суперелементів на кожному з рівнів синтезу.

Приведена (редуційована) матриця конструкції $\mathbf{K}_\mathbf{p}^{(n)}$ зберігає всі властивості повної скінченно-елементної моделі, хоча, на відміну від останньої, є більш заповненою і не завжди явно стрічковою.

Значно складнішою є побудова суперелементів у задачах динаміки конструкцій. Іноді використовують матрицю перетворень $\mathbf{T}$ і для одержання редуційованої матриці мас, однак одержана таким чином матриця мас є наближеною і не відображає правильно інерційні властивості конструкції.

Коректну редукцію матриць суперелементів для задач динаміки можна виконати, записуючи рівняння динаміки у просторі перетворень Фур'є [5]. При цьому редукція, проведена для матриці динамічної жорсткості

$$\mathbf{Z}(i\omega) = \mathbf{K}(i\omega) + (i\omega)^2 \mathbf{M} \tag{9.35}$$

за схемою, наведеною вище, дозволяє зберегти всі інерційні властивості конструкції.

Найбільш повно методика суперелементного підходу описується у роботах [18, 19].

11.4. Основні положення теорії пластичності

Лінійна теорія пружності побудована на фізичних залежностях Гука, згідно з якими між напруженнями і деформаціями має місце лінійна однозначна залежність. Між тим експериментальні випробування свідчать, що лінійна залежність має місце тільки при дуже малих деформаціях (напруженнях), а для деяких матеріалів (чавун) взагалі є нелінійною навіть при малих деформаціях. Типові діаграми деформування зразків при розтягу наведені на рисунку 13.1а.

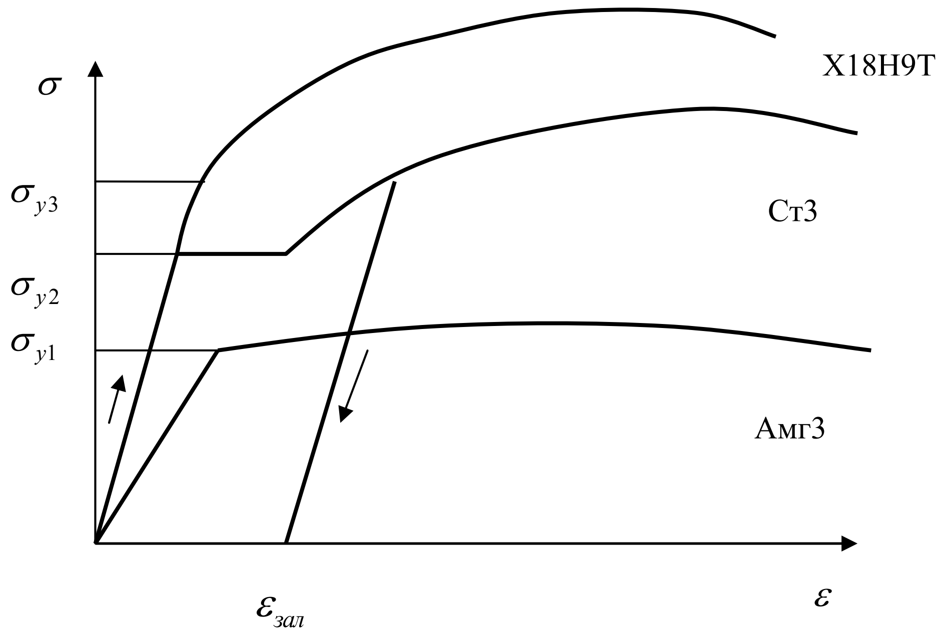


Рисунок 13.1 Діаграми деформування матеріалів

У конкретних випадках ці діаграми апроксимують більш або менш складними залежностями (рисунок 13.2).

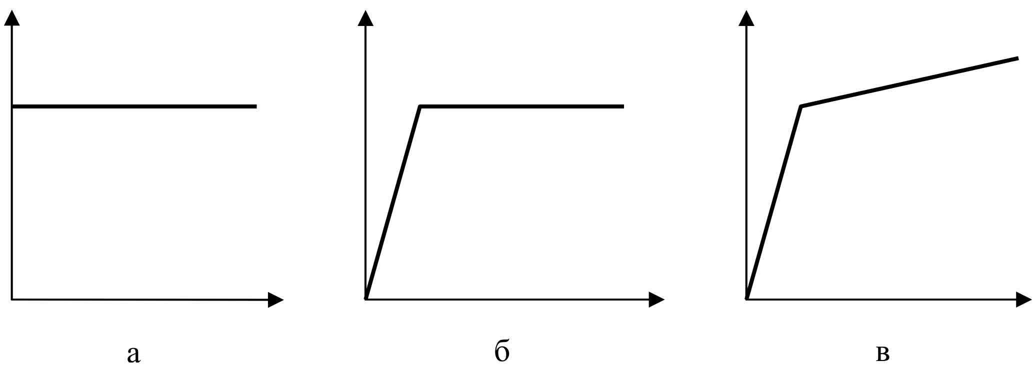


Рисунок 13.2 Умовні діаграми деформування (а – ідеально-пластичний, б – пружно-пластичний, в – пружно-пластичний зі зміцненням матеріали)

У залежності від поведінки матеріалу при розвантаженні розрізняють нелінійно пружні (рисунок 15.3, а) і неідеально-пружні матеріали (рисунок 13.3, б).

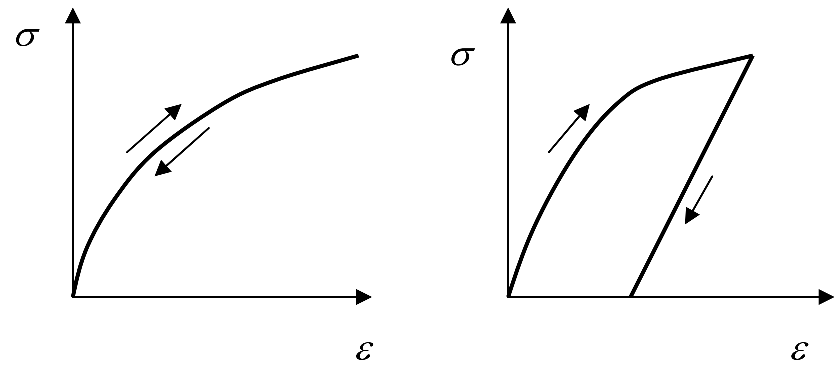


Рисунок 13.3 Нелінійно-пружний і неідеально-пружний матеріали

При циклічних деформаціях неідеально-пружних матеріалів відбувається втрата частини механічної енергії на теплоутворення, магнітні перетворення і т. п. Вивченню матеріалів з пластичним деформуванням присв'ячений розділ МТДТ, який називається теорією пластичності. Між нелінійно пружними і пружно-пластичними матеріалами основна різниця полягає у тому, що залежність між напруженнями і деформаціями для останніх є неоднозначною і залежить від шляху деформування. Між теорією пластичності і теорією пружності спільним є використання ***умов рівноваги, умов сумісності деформацій, кінематичних залежностей між деформаціями і переміщеннями***. ***Відмінності тільки у фізичних залежностях***, – у теорії пластичності використовуються інші фізичні залежності. Зазначимо, що між нелінійною теорією пружності і теорією пластичності проявляється суттєва відмінність, обумовлена неоднозначністю кривої деформування при навантаженні і розвантаженні у пружно-пластичних матеріалів. Якщо для одновісного напруженого стану перехід визначається границею пластичності, то при складному напруженому стані необхідно визначити якийсь критерій переходу у пластичний стан. Численні експериментальні дослідження свідчать, що при ***тривісному розтягу або стиску*** матеріал деформується як лінійно пружний. Тоді умови пластичності залежать тільки від другого і третього інваріантів девіатора напружень. Прикладом критеріїв є критерії Губера-Мізеса (критерій формозміни), Треска (найбільших дотичних напружень), Писаренко-Лебедева і багато інших [16,47]. Поки що немає універсального критерію , що і пояснює їх велику кількість. Припущення про наявність границі між пружним і пластичним станами справедливе для спрощених моделей пружно-пластичного матеріалу. У дійсності такої границі не існує і крива деформування не має зламів, тобто критерію пластичності як такого не існує, або існує деякий умовний. Згідно з гіпотезою Губера-Мізеса характеристикою залежностей між напруженнями і деформаціями можна вибрати інтенсивності напружень і деформацій.

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{((\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}{}^2 + \tau_{yz}{}^2 + \tau_{zx}{}^2)}$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{((\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z) + (\varepsilon_z - \varepsilon_x) + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}{}^2 + \gamma_{yz}{}^2 + \gamma_{zx}{}^2)}$$

Залежність між ними $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$ вважається єдиною для усіх напружених станів. При одновісному напруженому стані $\sigma_i = \sigma$ і $\varepsilon_i = \frac{2(1+\nu)}{3}\varepsilon$, а для матеріалу, який не стискається (тобто для якого $\nu = 0.5$) – $\varepsilon_i = \varepsilon$. Таким чином, крива $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$ у даному випадку співпадає з діаграмою розтягу матеріалу. Зменшення інтенсивності напружень свідчить про наявність розвантаження. Взагалі, величина деформацій у точках об'єму залежить не тільки від величини напружень, а і від шляху деформування. У зв'язку з цим пластичність повинна описуватись диференціальними (або інтегральними) залежностями. Більш простим варіантом теорії пластичності є теорія малих пружно-пластичних деформацій або ***деформаційна теорія пластичності***. Деформаційна теорія пластичності будується на трьох гіпотезах:

– об'ємна деформація є пружною, тобто для залежності середніх напружень і деформацій справедлиий закон Гука

$$\sigma_c = K\theta = 3K\varepsilon_c;$$

– девіатори напружень і деформацій співпадають з точністю до сталого множника

$$D_\sigma = \psi D_\varepsilon;$$

У скалярній формі ця рівність виглядає так:

$$\begin{aligned}
&\sigma_x - \sigma_c = \psi(\varepsilon_x - \varepsilon_c); \quad \tau_{xy} = \psi\gamma_{xy}/2;\\
&\sigma_y - \sigma_c = \psi(\varepsilon_y - \varepsilon_c); \quad \tau_{yz} = \psi\gamma_{yz}/2; \qquad (13.1)\\
&\sigma_z - \sigma_c = \psi(\varepsilon_z - \varepsilon_c); \quad \tau_{zx} = \psi\gamma_{zx}/2;
\end{aligned}$$

Праметр ψ визначається через інтенсивності напружень і деформацій:

$$\psi = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}.$$

Залежності деформаційної теорії пластичності виконуються тільки при простих навантаженнях або близьких до простих. Прості навантаження мають місце у тому випадку, коли компоненти тензора напружень змінюються пропорційно одному множнику. Рівняння (13.1) можна записати відносно деформацій у вигляді, характерному для рівнянь закону Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E^*}\left[\sigma_x - \nu^*(\sigma_y + \sigma_z)\right], \gamma_{xy} = \frac{1}{G^*}\tau_{xy},$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E^*}\left[\sigma_y - \nu^*(\sigma_z + \sigma_x)\right], \gamma_{yz} = \frac{1}{G^*}\tau_{yz},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E^*}\left[\sigma_z - \nu^*(\sigma_x + \sigma_y)\right], \gamma_{zx} = \frac{1}{G^*}\tau_{zx}.$$

де

$$\nu^* = \left[\frac{1}{2} - \frac{1-2\nu}{3E}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right]\left[1 + \frac{1-2\nu}{3E}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right]^{-1}, G^* = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} = \frac{E^*}{2(1+\nu^*)},$$

$$E^* = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left[1 + \frac{1-2\nu}{3E}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right]^{-1}.$$

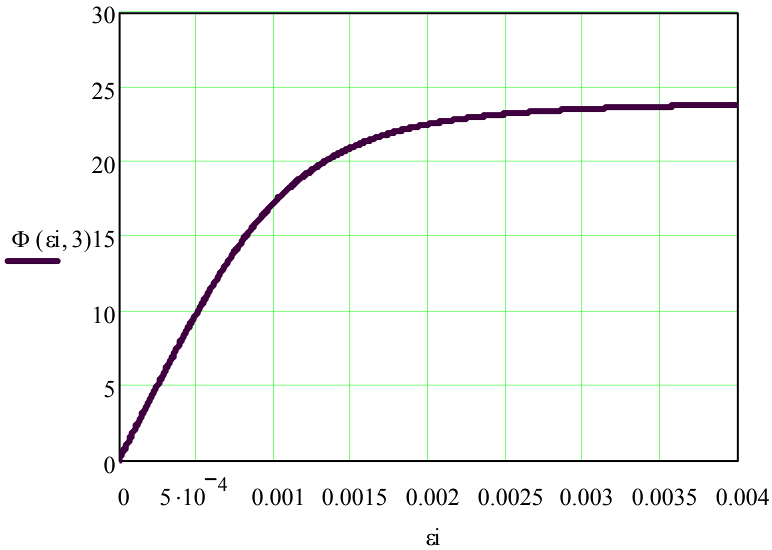
Крім того,

$$\sigma_c = \frac{E^*}{1-2\nu^*}\varepsilon_c.$$

Таким чином, задачу теорії пластичності можна розглядати як задачу теорії пружності, але для неоднорідного пружного тіла, оскільки умовні параметри пружності E^*, ν^*, G^* залежать у кожній точці тіла від характеристик напружено-деформованого стану. Для розв'язання таких нелінійних задач використовують метод послідовних наближень. У початковому наближенні приймають $E^{*0} = E, G^{*0} = G, \nu^{*0} = \nu$ і з розв'язку пружної задачі знаходять напруження і деформації у нульовому наближенні. Далі із залежності $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$ заходиться σ_i, а потім нові значення параметрів $E^{*1} = E, G^{*1} = G, \nu^{*1} = \nu$. Очевидно, після цього у кожній точці об'єму конструкції матимемо неоднакові фізичні параметри, тобто приходимо до задачі неоднорідної теорії пружності. Після одержання розв'язку, знайдемо напруження і деформації у наступному наближенні і т.д. Процес послідовних наближень продовжується до тих пір, поки значення компонент тензорів напружень або деформацій у двох сусідніх наближеннях будуть відрізнятися не більше ніж встановлена допустима похибка. Для залежностей $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$, які мають місце для більшості матеріалів, цей процес збігається.

Більш універсальною, але і більш складною є теорія пластичності у приростах, так звана теорія течії**.** Докладний аналіз теорій течії можна знайти у підручниках теорії пластичності [47].

Розглянемо приклад визначення подовження ступінчастого стержня, який закріплений на одному кінці і навантажений осьовою силою на другому. Узагальнена крива деформування для матеріалу стержня зображена нижче на рисунку.



Функція, якій відповідає ця крива, має вигляд

$$\Phi(\varepsilon i, n) := \frac{E \cdot \varepsilon i}{\left[1 + \left(\frac{E \cdot \varepsilon i}{\sigma_T}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}}$$

У залежності від значення параметра n можна одержати різні форми кривої $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$. Вхідні параметри ступінчастого стержня прийняті такими: сила N (кН), площі A1, A2, A3 (см**2), довжини ділянок a1, a2, a3 (см).

$N := 20$

$A1 := 1$

$A2 := 2$

$A3 := 3$

$a1 := 10$

$a2 := 15$

$a3 := 20$

Послідовність розв'язання задачі подано нижче. Сумарне подовження стержня позначено літерою Δ.

Нульове наближення:

$\varepsilon i1_0 := \frac{N}{A1 \cdot E}$ $\quad \varepsilon i2_0 := \frac{N}{A2 \cdot E}$ $\quad \varepsilon i3_0 := \frac{N}{A3 \cdot E}$

$\varepsilon i1_0 = 1 \times 10^{-3}$ $\quad \varepsilon i2_0 = 5 \times 10^{-4}$ $\quad \varepsilon i3_0 = 3.333 \times 10^{-4}$

$\Delta1(\varepsilon i1_0) := \varepsilon i1_0 \cdot a1$ $\quad \Delta2(\varepsilon i2_0) := \varepsilon i2_0 \cdot a2$ $\quad \Delta3(\varepsilon i3_0) := \varepsilon i3_0 \cdot a3$

$$\Delta_0(\varepsilon i1_0, \varepsilon i2_0, \varepsilon i3_0) := \Delta1(\varepsilon i1_0) + \Delta2(\varepsilon i2_0) + \Delta3(\varepsilon i3_0)$$

$$\Delta_0(\varepsilon i1_0, \varepsilon i2_0, \varepsilon i3_0) = 0.024$$

Значення модуля пружності на наступних етапах наближень обчислювалось за формулою $Ec(\varepsilon i) := \dfrac{\Phi(\varepsilon i, 3)}{\varepsilon i}$

Перші два наближення:

$$\varepsilon i1_1 := \frac{N}{A1 \cdot Ec(\varepsilon i1_0)} \qquad \varepsilon i2_1 := \frac{N}{A2 \cdot Ec(\varepsilon i2_0)} \qquad \varepsilon i3_1 := \frac{N}{A3 \cdot Ec(\varepsilon i3_0)}$$

$$\varepsilon i1_1 = 1.164 \times 10^{-3} \qquad \varepsilon i2_1 = 5.118 \times 10^{-4} \qquad \varepsilon i3_1 = 3.357 \times 10^{-4}$$

$$\Delta 1(\varepsilon i1_1) := \varepsilon i1_1 \cdot a1 \qquad \Delta 2(\varepsilon i2_1) := \varepsilon i2_1 \cdot a2 \qquad \Delta 3(\varepsilon i3_1) := \varepsilon i3_1 \cdot a3$$

$$\Delta_1(\varepsilon i1_1, \varepsilon i2_1, \varepsilon i3_1) := \Delta 1(\varepsilon i1_1) + \Delta 2(\varepsilon i2_1) + \Delta 3(\varepsilon i3_1)$$

$$\Delta_1(\varepsilon i1_1, \varepsilon i2_1, \varepsilon i3_1) = 0.026$$

$$\varepsilon i1_2 := \frac{N}{A1 \cdot Ec(\varepsilon i1_1)} \qquad \varepsilon i2_2 := \frac{N}{A2 \cdot Ec(\varepsilon i2_1)} \qquad \varepsilon i3_2 := \frac{N}{A3 \cdot Ec(\varepsilon i3_1)}$$

$$\varepsilon i1_2 = 1.242 \times 10^{-3} \qquad \varepsilon i2_2 = 5.126 \times 10^{-4} \qquad \varepsilon i3_2 = 3.357 \times 10^{-4}$$

$$\Delta 1(\varepsilon i1_2) := \varepsilon i1_2 \cdot a1 \qquad \Delta 2(\varepsilon i2_2) := \varepsilon i2_2 \cdot a2 \qquad \Delta 3(\varepsilon i3_2) := \varepsilon i3_2 \cdot a3$$

$$\Delta_2(\varepsilon i1_2, \varepsilon i2_2, \varepsilon i3_2) := \Delta 1(\varepsilon i1_2) + \Delta 2(\varepsilon i2_2) + \Delta 3(\varepsilon i3_2)$$

$$\Delta_2(\varepsilon i1_2, \varepsilon i2_2, \varepsilon i3_2) = 0.027$$

У третьому наближенні одержано той же результат.

Програму, яка реалізує метод послідовних наближень для даного прикладу, наведено нижче. Як видно, для одержання розв’язку достатньо було двох наближень. Цей метод називають методом змінних параметрів. У загальному випадку складного напруженого стану задачі теорії пластичності методом змінних параметрів розв’язують у такій послідовності. У першому наближенні модулі і коефіцієнт Пуасона приймають такими ж як і для пружного матеріалу і розв’язують лінійну задачу теорії пружності, тобто визначають напруження і деформації у точках об’єму. Далі, у кожній точці об’єму знаходять інтенсивності напружень і деформацій у нульовому наближенні і визначають нові значення модулів і коефіцієнта Пуассона і знову розв’язують задачу теорії пружності, але у даному випадку уже для неоднорідного матеріалу. Відповідно до методу скінченних елементів це означає, що у кожному наближенні необхідно перераховувати матриці жорсткості для кожного елемента і для конструкції у цілому. Існують методи, у яких матриці жорсткості не перераховуються, а змінюються навантаження у відповідності з приростами напружень. Ці методи називають методами додаткових параметрів [47].

$$
\Delta := \left|
\begin{array}{l}
Tol \leftarrow 0.001 \\
k \leftarrow 0 \\
\varepsilon i1_k \leftarrow \dfrac{N}{A1 \cdot E} \\
\varepsilon i2_k \leftarrow \dfrac{N}{A2 \cdot E} \\
\varepsilon i3_k \leftarrow \dfrac{N}{A3 \cdot E} \\
\delta \leftarrow 1 \\
\Delta_k \leftarrow \varepsilon i1_k \cdot a1 + \varepsilon i2_k \cdot a2 + \varepsilon i3_k \cdot a3 \\
\text{while } \delta > Tol \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
\varepsilon i1_{k+1} \leftarrow \dfrac{N}{A1 \cdot Ec(\varepsilon i1_k)} \\
\varepsilon i2_{k+1} \leftarrow \dfrac{N}{A2 \cdot Ec(\varepsilon i2_k)} \\
\varepsilon i3_{k+1} \leftarrow \dfrac{N}{A3 \cdot Ec(\varepsilon i3_k)} \\
\Delta_{k+1} \leftarrow \varepsilon i1_{k+1} \cdot a1 + \varepsilon i2_{k+1} \cdot a2 + \varepsilon i3_{k+1} \cdot a3 \\
\delta \leftarrow \Delta_{k+1} - \Delta_k \\
k \leftarrow k + 1
\end{array}
\right. \\
\Delta
\end{array}
\right.
$$

Результати розрахунку

$$
\Delta = \begin{pmatrix} 0.024 \\ 0.026 \\ 0.027 \end{pmatrix}
$$

Рисунок 13.4 Програма реалізації методу змінних параметрів

11.5 МСЕ у задачах розрахунку конструкцій з неідеально-пружних матеріалів

Розглянутий вище приклад розрахунку одновимірного об'єкта може бути узагальнений на скінченно-елементні моделі. Фізичні залежності для неідеально-пружного матеріалу при складному напруженому стані мають вигляд

$$
\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}, \qquad (14.1)
$$

де $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$ - вектори напружень і деформацій відповідно.

Якщо це рівняння можна розв'язати відносно напружень

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}), \qquad (14.2)$$

то систему рівнянь скінченно-елементної моделі конструкції можна одержати, скориставшись методикою, розглянутої вище для лінійно-пружних матеріалів, тобто використати МСЕ у варіанті методу переміщень, коли невідомими приймають вузлові переміщення.

Матриці жорсткості і зовнішніх сил визначаються з формул потенціальної енергії і роботи зовнішніх сил

$$U = \int_V \varepsilon^T \sigma dV, \quad \int_S u^T F_s dS \qquad (14.3)$$

з урахуванням нелінійної залежності (14.2).

Після використання функцій **N,** апроксимуючих вузлові переміщення **q,**

$$\mathbf{U} = \mathbf{Nq} \qquad (14.4)$$

матриця жорсткості елемента матиме вигляд

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \int_V (\mathbf{AN})^T \mathbf{C}(\mathbf{q})(\mathbf{AN}) dV, \qquad (14.5)$$

де **A** – матриця диференційних операторів, **C(q)** – матриця модулів, які залежать від деформацій, а значить і від переміщень.

Рівняння скінченно-елементної моделі конструкції має вигляд

$$\mathbf{K}(\mathbf{q})\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad . \qquad (14.6)$$

Для розв’язання цієї системи нелінійних алгебраїчних рівнянь можна застосувати методи розв’язку систем нелінійних рівнянь (див. лекцію 15), які є ефективними для систем великої розмірності, характерних для МСЕ.

Найбільш прийнятним методом знаходження розв’язку є метод змінної жорсткості, розглянутий вище на одновимірному прикладі. У даному випадку рівняння (14.6) розв’язують як лінійне при $\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \mathbf{K}(\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}) = \mathbf{K}_0$ і визначають вектор $\mathbf{q}_1 = \mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{F}$. Далі реалізують ітераційний процес $\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{K}_n^{-1}\mathbf{F}$ до тих пір, поки переміщення не перестануть змінюватися.

Недоліком методу є необхідність перерахування матриць жорсткості на кожній ітерації і розв’язання відповідної системи рівнянь.

Метод змінної жорсткості застосовується також для моделювання руйнування конструкції. У цьому випадку на кожному кроці ітерації окрім переміщень обчислюються напруження у кожному скінченному елементі і порівнюються з критичним для даного матеріалу напруженням. Якщо напруження в окремих елементах перевищує критичне, модулі пружності матеріалу цих елементів прирівнюють до нуля, що приводить до видалення їх з конструкції. Таким способом моделюється процес розвитку тріщини аж до моменту руйнування конструкції.